Durée : 4 heures

Baccalauréat C Besançon juin 1970

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe, z, de module 1, d'argument α dont une détermination α_0 est telle que $-\pi \leqslant \alpha_0 < \pi$.

1. Calculer, en fonction de α, le module et l'argument du nombre complexe

$$Z = 1 + z + z^2.$$

2. On considère un deuxième nombre complexe, z', de module 1, d'argument β.
Dans le cas où il est défini, montrer que le nombre complexe $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un nombre réel.

EXERCICE 2

On considère la fonction f, de la variable réelle x, définie par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}.$$

1. Étudier son domaine de définition. Montrer qu'elle est périodique de période π et étudier ses variations dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right[$.
Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. Calculer les primitives de f. On mettra d'abord $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = A + B\left(\frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\right),$$

où A et B sont des constantes à préciser. On rappelle ensuite qu'une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ est $\text{Log}\,|u|$, où le symbole Log désigne la fonction logarithme népérien.
En déduire la valeur de l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ parallèles à l'axe des ordonnées.

PROBLÈME

1. Dans un plan, on appelle I l'inversion de pôle O et de puissance k^2 (k réel positif), S la symétrie par rapport à une droite (D) passant par O et T la transformation $T = S \circ I$ (le symbole $\circ$ désignant la loi de composition des transformations).
Montrer que la transformation T est aussi le produit d'une inversion, I', de pôle O et de puissance négative, et d'une symétrie, S', par rapport à une droite (D'), soit $T = S' \circ I'$.
Chacun des produits $S \circ I$ et $S' \circ I'$ est-il commutatif ?
La transformation T est-elle involutive ?
Le plan est rapporté à deux axes orthonormés, $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, l'axe $x'\text{O}x$ étant pris sur la droite (D). Un point M, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans ce repère, peut être considéré comme l'image du nombre complexe $z = x + \text{i}y$.

Si M' est l'image du point M par la transformation T et représente le nombre complexe $z' = x' + \mathrm{i}y'$, calculer z' en fonction de z.

Montrer que la transformation T a deux points doubles, A et B, que l'on précisera.

2. **a.** Étudier le transformé d'un cercle (C) appartenant au faisceau dont les points limites sont A et B.

b. Étudier le transformé d'un cercle (C') appartenant au faisceau dont les points de base sont A et B. En déduire une construction simple du point M', transformé de M par T.

3. Le plan étant rapporté au repère défini précédemment, un point M est défini par les égalités $\mathrm{O}M = r$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right) = \theta$.

Le point M' étant son transformé par T, on appelle P le milieu de MM'.

Calculer les coordonnées de P en fonction de r et de θ.

a. Quel est l'ensemble des points P lorsque r a une valeur constante, r_0 ? Préciser ses éléments géométriques.

b. Quel est l'ensemble des points P lorsque θ a une valeur constante, θ_0 ? Préciser ses éléments géométriques.

Montrer que la tangente en un point P de cet ensemble est la droite MM' correspondante.