Baccalauréat C Amiens groupe 4 [1] juin 1980

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Si a et b sont deux entiers, le plus grand diviseur commun de a et de b est noté $\Delta(a,\ b)$.
Soit (U) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Calculer les termes $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6$ de la suite U.
2. Montrer que le suite U vérifie :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

En déduire le plus grand diviseur commun de deux termes consécutifs de cette suite U.

3. **a.** Montrer que la suite U vérifie :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2^n?1.$$

Les nombres $2^n - 1$ et $2^{n+1} - 1$ sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

b. Vérifier que, pour tout couple d'entiers naturels $(n,\ p)$

$$u_{n+p} = u_n\left(u_p + 1\right) + u_p.$$

En déduire que, pour tout couple d'entiers naturels $(n,\ p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\Delta\left(u_n,\ u_p\right) = \Delta\left(u_n,\ u_{n+p}\right). \qquad (1)$$

c. Soit a et b deux entiers naturels non nuls, r est le reste de la division euclidienne de a par b ; déduire de la propriété (1) que

$$\Delta\left(u_b,\ u_r\right) = \Delta\left(u_a,\ u_b\right)$$

et que

$$\Delta\left(u_a,\ u_b\right) = u_\Delta(a, b).$$

(on pourra utiliser l'algorithme d'Euclide, méthode des divisions successives).

d. Calculer alors $\Delta\left(u_{1\,982},\ u_{312}\right)$.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

On considère dans le plan vectoriel V rapporté à une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ l'endomorphisme $g_{\alpha,\ \beta}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ associe le vecteur $\vec{u}\,'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ dans la même base définies par

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \alpha x - 2\alpha y \\ y' = 2\beta x + \beta y \end{array}\right.$$

α et β étant deux réels.

1.

1. Déterminer les réels α et β pour que $g_{\alpha,\,\beta}$ soit une projection vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Déterminer les réels α et β pour que $g_{\alpha,\,\beta}$ soit une involution que l'on précisera.

PROBLÈME **12 POINTS**

On se propose d'étudier des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes) définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\quad (a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbb{C}^4,\quad (c,\, d) \neq (0,\, 0).$$

Dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ on désigne par M et M' les points d'affixes z et $f(z)$ et par F la fonction de P dans P qui au point M associe le point M'.
F sera appelée fonction ponctuelle associée à f.

I. Montrer que f est constante si et seulement si $ad - bc = 0$.

1. On pose $a = 1$, $c = 0$, $d = 1$ et on note f_1 l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.
   a. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de F_1.
   b. Déterminer l'image par F_1 :
   – d'une droite D quelconque de P
   – d'un cercle $\mathscr{C}$ quelconque de P.
2. On pose $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $a \neq 0$ et on note f_2 l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.
   a. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de F_2.
   b. Déterminer l'image par F_2 :
   – d'une droite D quelconque de P
   – d'un cercle $\mathscr{C}$ quelconque de P.
3. On pose $a = d = 0$, $b = c = 1$ et on note f_3 l'application de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.
   a. Montrer que F_3 est une involution de $\text{P}_{\{O\}}$ dans $\text{P}_{\{O\}}$.
   Quels sont les points invariants de F_3 ?
   b. Soit Σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\left(\text{O},\, \vec{\imath}\right)$ et $K = \Sigma \circ F_3$.
   Déterminer l'affixe z'' de $K(M)$ en fonction de l'affixe z de M. (On suppose $\neq 0$).
   En déduire que les points M et M'' appartiennent à une même demi-droite d'origine O et que $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OM''}\right\| = 1$.
   c. Déterminer l'image par F_3 :
   – d'une droite passant par O, privée de ce point
   – d'un cercle de centre O
   – de la droite d'équation $x = 1$.
4. On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{\text{i}}{z-1}$.
   a. Soit A le point d'affixe 1. Montrer que F est une bijection de $\text{P}-\{A\}$ sur $\text{P}-\{O\}$.
   b. Montrer qu'il existe des valeurs de a et b telles que F soit la composée de fonctions ponctuelles définies au 1, 2 et 3.
   c. En déduire l'image par F :
   – de la droite d'équation $x = 1$, privée de A

– du cercle de centre A et rayon 1
– de la droite d'équation $x = 2$.

II. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions f définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\quad (a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4,\quad \text{tel que } ad - bc \neq 0.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est aussi l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\quad (a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4,\quad \text{tel que } |ad - bc| = 1.$$

(On montrera que si $k \in \mathbb{R}^\star$, $(a,\ b,\ c,\ b)$ et $(ka,\ kb,\ kc,\ kd)$ définissent la même fonction f).

2. On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $|ad - bc| = 1$.

Montrer que $(\mathcal{A},\ \times)$ est un groupe et que $u : \mathcal{A} \to \mathcal{F}\, m f$ si $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $u(m) =$
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathcal{A}, \times)$ dans $(\mathcal{F},\ \circ)$.
Définir alors la structure de $(\mathcal{F},\ \circ)$.

3. Déterminer tous les éléments de $\mathcal{F}$ tels que

$$a = 4,\quad b = 3,\quad (c,\ d) \in \mathbb{Z}^2.$$

Les questions I. et II. sont indépendantes.