Baccalauréat C groupe 3 [1] juin 1984

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on appelle disque unité :
$D = \{M \in \text{P}/\text{O}M \leqslant 1\}$.
On appelle distance d'un point M à D, et on note $d(M, D)$, la plus petite des distances de M aux points de D.

1. Démontrer que si M est extérieur au disque, alors $d(M, D) = MM_0$ où M_0 est l'intersection du cercle unité avec le segment $[\text{O}M]$.
2. En déduire que si x et y sont les coordonnées de M, on a alors :
$$d(M,D) = \sqrt{x^2+y^2} - 1.$$
3. Soit Δ la droite d'équation $y = -2$. Chercher alors l'ensemble des points M du plan tels que :
$$d(M, D) = 2d(M, \Delta).$$
Représenter D, Δ et l'ensemble obtenu sur une même figure.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^1 \text{e}^{tx^2}\,\text{d}x.$$

1. Calculer $F(x)$ pour $x \neq 0$ et $F(0)$. Démontrer que F est continue en 0.
2. Écrire un développement limité de à l'ordre 2 de e^x au voisinage de 0.
En déduire un développement limité à l'ordre 2 de $F(x)$ au voisinage de 0. Démontrer alors que : $F'(0) = 0$.
3. Démontrer que si
$$0 \leqslant x \leqslant x' \quad \text{alors} \quad F(x) \leqslant F\left(x'\right)$$
et que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.
4. Donner, en tenant compte des résultats précédents, l'allure du graphe de F.

PROBLÈME **12 POINTS**

N. B.- Les parties B et C sont indépendantes.

Soient $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct du plan, et s la similitude directe de centre O, d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

---

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

A

1. Définir s analytiquement. M étant un point du plan, on pose $M' = s(M)$, $M'' = s \circ s(M)$.
2. Montrer que pour tout point M,

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M''} + \overrightarrow{\mathrm{O}M'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \overrightarrow{0}.$$

B

On appelle M_0 le point de coordonnées $(1\,;\,0)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_{n+1} = s\left(M_n\right)$. On appelle $\left(x_n\,;\,y_n\right)$ les coordonnées de M_n.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0$$

$$\text{et} \quad y_{n+2} + y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = 0. \quad \text{(Utiliser A 2.)}$$

2. Soit (u_n) une suite vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = 0$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = -\frac{2}{5}u_{n+2} - \frac{4}{5}u_{n+1} + \frac{2}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_0.$$

3. Caractériser géométriquement la composée de n similitudes égales à s. En déduire l'expression de $\mathrm{O}M_n$ en fonction de n.
Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{O}M_n$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} y_k$.

C

Soit σ l'application linéaire associée à s. On se donne un point mobile $M(t)$ de coordonnées $(x(t)\,;\,y(t))$, de vecteurs vitesse et accélération $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma(t)}$, tel que

$$V(t) = \sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M(t)}\right), \quad \forall t.$$

On suppose que $M(0)$ a pour coordonnées $(1\,;\,0)$.

1. Exprimer $x'(t)$ et $y'(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
Montrer que $\overrightarrow{\Gamma(t)} = \sigma\left(\overrightarrow{V(t)}\right)$, $\forall t$.

2. Montrer que $\sigma \circ \sigma\left(\overrightarrow{v}\right) + \sigma\left(\overrightarrow{v}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{v} = 0$ pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$. (Utiliser A 2.)

En déduire que :

$$\overrightarrow{\Gamma(t)} + \overrightarrow{V(t)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{0}, \quad \forall t.$$

3. Montrer que les fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ vérifient l'équation différentielle

$$f'' + f' + \frac{1}{2}f = 0.$$

4. Résoudre l'équation différentielle $f'' + f' + \frac{1}{2}f = 0$. Calculer $\overrightarrow{V(0)}$.

Calculer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

5. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^a x(t)\,\mathrm{d}t = 2x'(0) + 2x(0) - 2x'(a) - 2x(a) \quad \text{(Utiliser C 3.)}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_0^a x(t)\,\mathrm{d}t$.

Calculer de même $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_0^a y(t)\,\mathrm{d}t$.