Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Besançon juin 1969 ∾

EXERCICE 1

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ orthonormé, le point M image du nombre z. Soit M' le symétrique de M par rapport à la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{Ou},\ \overrightarrow{Ov}\right)$ et M'' le symétrique de M' par rapport au support de $\overrightarrow{Ov}$.

Posant $z = a+\mathrm{i}b$, calculer en fonction de a et b les affixes, z' et z'', des points M' et M'', puis le rapport $\dfrac{z''}{z'}$.

En déduire la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM'},\ \overrightarrow{OM''}\right)$ et la valeur du rapport $\dfrac{OM''}{OM'}$.

Pouvait-on prévoir géométriquement ces résultats ?

EXERCICE 2

1. Étudier le sens de variation de la fonction, f, de la variable réelle x définie par

$$x \longmapsto f(x) = y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

2. Démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque, $x = g(y)$.
   Posant $X = y$ et $Y = x$, tracer sur la même figure qu'au 1. la courbe représentative de la fonction

$$X \longmapsto g(X) = Y.$$

PROBLÈME

Partie A

1. Par rapport à un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$, on donne le cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

   et la droite (D) d'équation

$$x = 1,$$

   qui coupe Ox en A.
   M désignant un point de (C), distinct de O, la droite OM coupe (D) en I. On appelle P le symétrique de M par rapport à I et l'on pose

$$\left(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OM}\right) = \theta \pmod{2\pi}.$$

   Calculer OP en fonction de θ et les coordonnées, x et y, de P en fonction de $\operatorname{tg}\theta = t$.
   Former une relation algébrique entre x et y, indépendante de t.

2. Étudier le sens de variation de la fonction, f, de la variable réelle x définie par la relation

$$x \longmapsto f(x) = y = x\sqrt{\frac{1-x}{x-2}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant x < 2.$$

Tracer sa courbe représentative dans le repère Ox, Oy. Préciser la tangente au point d'abscisse $x = 1$.

En déduire l'ensemble des points P lorsque M varie sur (C).

3. Une inversion de pôle O et de puissance 1 transforme M en M' et P en P'.

Démontrer que M' et P' sont conjugués par rapport au cercle (C) et que les droites AP' (lorsque P' et A sont distincts) et OI sont des droites conjuguées par rapport au cercle (C).

Établir que le produit des coefficients directeurs des droites OI et AP' est constant lorsque M varie sur (C).

En déduire l'équation de l'ensemble des points P' et construire cet ensemble.

Reconnaître que cet ensemble appartient à une ellipse, dont on donnera les coordonnées des sommets et des foyers.

Partie B

1. On donne, par rapport au repère de la partie A, la droite (Δ) d'équation

$$y = mx + p, \quad \text{avec} \quad p \neq 0.$$

À tout point variable, M, de (Δ), d'abscisse x telle que $x(x-2) \neq 0$, on associe le point P aligné avec O et M de façon que le milieu, I, du segment MP ait pour abscisse 1.

Former l'équation de la courbe (Γ), support des points P associés aux points M de (Δ).

2. Trouver l'équation de cette courbe dans le repère $\left(\omega,\ \overrightarrow{\imath_1},\ \overrightarrow{\jmath_1}\right)$, ω étant le point de coordonnées $(2\ ;\ 2m-p)$, $\overrightarrow{\imath_1}$ et $\overrightarrow{\jmath_1}$ étant les vecteurs

$$\overrightarrow{\imath_1} = \overrightarrow{\imath} + m\overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{\jmath_1} = \overrightarrow{\jmath}.$$

Reconnaître alors la courbe (Γ).