

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Besançon juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Donner la nature de la conique d'équation

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0.$$

puis la dessiner en repère orthonormé en précisant ses axes, ses sommets, ses foyers et ses directrices.

EXERCICE 2

Développer, par la formule du binôme de Newton, les polynômes suivants :

$$(x+1)^{2n}, (x-1)^{2n} \quad \text{et} \quad (x^2-1)^{2n}$$

En déduire que la somme suivante :

$$1 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \binom{2n}{3}^2 + \dots + (-1)^{2n} \binom{2n}{2n}^2$$

est égale à $(-1)^n \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n!} \right]$.

Pour cela, on étudiera le coefficient du terme en x^{2n} dans le produit des deux premiers polynômes, puis dans le troisième polynôme.

PROBLÈME

Soit la fonction, de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , définie par

$$x f(x) = x e^{-x+1}.$$

1. Rappeler la limite de $\frac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis étudier la fonction et la représenter en repère orthonormé.
On trouvera le point d'inflexion de la courbe, qui sera nommée (γ) , c'est-à-dire le point de (Γ) , courbe représentative de f en lequel $f''(x) = 0$.
2. Soit le nombre réel donné $\lambda > 0$.
Trouver l'aire du domaine situé entre la courbe, l'axe $x'x$ et la droite d'équation $x = \lambda$.
Pour cela, on cherchera une primitive de f de la forme $x \mapsto (ax + b)e^{-x+1}$.
Cette aire a-t-elle une limite quand λ tend vers $+\infty$?
3. On considère maintenant le mobile, M , suivant :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t e^{-t+1}, \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trouver la trajectoire du mobile, son vecteur vitesse, \vec{V} , et son vecteur accélération, $\vec{\Gamma}$. On rappelle que le mouvement est dit accéléré dans l'intervalle $]t'; t''[$ de \mathbb{R} si, dans cet intervalle, $\|\vec{V}\|^2$ est une fonction croissante du temps, c'est-à-dire si $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} > 0$, et retardé si c'est une fonction décroissante, c'est-à-dire si $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} < 0$.

Préciser dans quels intervalles de \mathbb{R} le mouvement est accéléré et dans quels intervalles il est retardé. Préciser aussi le sens du mouvement.

4. En utilisant le calcul, déjà fait, de $f'(x)$ et de $f''(x)$, exprimer $f^n(x)$ à l'aide de $f^{n-1}(x)$. Exprimer $f^n(x)$ à l'aide de $f(x)$, n et x .