Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1974 Besançon ∾

EXERCICE 1

Pour quelle valeur du paramètre réel *positif* a l'endomorphisme φ du plan vectoriel E_2, dont la matrice dans une base de E_2 est

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ -2 & 1-a \end{pmatrix}$$

est-il involutif? Montrer alors que φ est une symétrie vectorielle par rapport à une droite vectorielle (D) suivant la direction d'une droite vectorielle (Δ).
Déterminer (D) et (Δ) par leurs équations cartésiennes.

EXERCICE 2

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\text{Log}\, x}{x^2} \quad \text{(Log désigne le logarithme népérien.)}$$

1. Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; pour calculer la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$, on pourra poser $u = x^2$.
2. En utilisant une intégration par parties, trouver une primitive de la fonction f. En déduire l'aire de la partie du plan comprise entre $x'\text{O}x$, (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda\,(\lambda > 1)$.
   Cette aire admet-elle une limite lorsque λ tend vers l'infini positif?

PROBLÈME

Partie A

On associe, à tout couple $(a ; b)$ de nombres complexes, l'application $f_{a,\, b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f_{a,\, b}(z) = az + b\overline{z}.$$

où $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.

1. Démontrer que l'application $f_{a,\, b}$ est linéaire, $\mathbb{C}$ étant considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On rappelle que :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. **a.** Démontrer que si le nombre $Az + B\overline{z}$ (A et B deux nombres complexes) est nul pour tout z, alors $A = B = 0$ (on pourra pour cela donner à z les valeurs 1 et i.
   b. Traduire alors par un système de deux relations entre a, b, $\overline{a}$ et $\overline{b}$ la condition pour que $f_{a,\, b}$ soit involutive.
   c. Que deviennent ces relations pour $b = 0$ (on montrera qu'il existe deux applications $f_{a,\, 0}$ involutives) ?

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Etant donné α de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}\right]$, on considère l'application S qui, au point M image du nombre complexe $z = x + \text{i}y$ $(x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R})$, fait correspondre le point N image du nombre complexe $Z = X + \text{i}Y$ $(X \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R})$ tel que :

$$Z = f_{a,\ b}(z) \quad \text{avec } a = 0 \text{ et } b = \cos 2\alpha + \text{i} \sin 2\alpha \ (\alpha \text{ donné}).$$

1. Établir les relations qui donnent X et Y en fonction de x et y et réciproquement x et y en fonction de X et Y. Montrer que S est une transformation involutive du plan.
2. Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est une droite (Δ) dont on déterminera l'équation. Pour tout point M de transformé N par S démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est normal à la droite (Δ).
3. Déterminer l'ensemble des points I milieux des bipoints $(M,\ N)$. Préciser la nature de la transformation S.
4. On suppose, dans cette question, que $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.
   a. Soit (H) la courbe d'équation : $x^2 - 3y^2 = 4$.
   Indiquer la nature de (H).
   b. Construire cette courbe dans le repère (0, i, j). Soit (H') la courbe déduite de (H) par la transformation S ; donner l'équation de (H') sous la forme Y = f(X) et construire, dans le même repère, la courbe (H').
   c. Calculer l'aire de la partie du plan limité par (H'), la droite (M et les droites d'équation $x = 2$ et $x = k\,(k > 2)$. Déterminer k pour que cette aire soit égale à $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Partie B

On suppose maintenant que le point M est animé d'un mouvement dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Le mouvement est défini par : et

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \text{e}^{t} \\ y & = & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(2\text{e}^{-t} + \text{e}^{t}\right) \end{array}\right.$$

1. Quelle est la trajectoire du point M mobile ? (On précisera le sens de parcours) .
2. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{\text{V}(t)}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ du point M à l'instant t. Préciser dans quels intervalles de temps le mouvement est accéléré, retardé.
3. Déterminer les dates t auxquelles : $\left\|\overrightarrow{\text{V}(t)}\right\| = \sqrt{2}$. - Donner les coordonnées de $\overrightarrow{\text{V}(t)}$ à l'une de ces deux dates.