Durée : 4 heures

Baccalauréat C 1975 Besançon

EXERCICE 1

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$(2+\mathrm{i})Z^2-(9+2\mathrm{i})Z+5(3-\mathrm{i})=0.$$

II.

1. Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x-1},$$

où le nombre e est la la base des logarithmes népériens.

Étudier les variations de f. Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.

2. Calculer l'aire de la partie du plan

$$A=\left\{M(x,y)\,|\,1\leqslant x\leqslant 3 \qquad 1\leqslant y\leqslant f(x)\right\}.$$

III.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$A_\lambda=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ -\dfrac{1}{\lambda} & -1\end{pmatrix},$$

où λ est un nombre réel non nul.

Partie A

1. **a.** Montrer que si A_λ et A_μ sont deux éléments de $\mathcal{M}$, on a

$$A_\lambda\cdot A_\mu=A_\mu\cdot A_\lambda \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad \lambda=\mu.$$

   b. Montrer que $A_\lambda\cdot A_\mu+A_\mu\cdot A_\lambda=h(\lambda,\mu)I$, où $h(\lambda,\mu)$ est un scalaire réel et I la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

   Montrer que $h(\lambda,\mu)=0$ si, et seulement si $\lambda=\mu$.

   Que peut-on dire de A_λ^2 ?

   c. Calculer $\left(A_\lambda+A_\mu\right)^2$.

2. **a.** Pour tout entier $n\geqslant 1$, montrer que

$$(A_\lambda+A_\mu)^{2n}=(-1)^n\frac{(\lambda-\mu)^{2n}}{(\lambda\mu)^n}I.$$

   b. Montrer que la matrice $(A_\lambda+A_{2\lambda})^{2n}$ ne dépend pas de λ.

3. On dit qu'une matrice $M(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ dont les éléments dépendent d'un paramètre x, possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$ s'il existe une matrice $L = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ telle que

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty} a(x) \qquad \beta = \lim_{x \to +\infty} b(x)$$
$$\gamma = \lim_{x \to +\infty} c(x) \qquad \delta = \lim_{x \to +\infty} d(x).$$

a. Montrer que la matrice $C_n = \sum_{p=1}^{p=n} (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p}$ a, pour n tendant vers $+\infty$, une limite que l'on calculera.

b. Exprimer la matrice $B_n = \sum_{p=1}^{p=n} (A_p + A_{p+1})^2$.

c. Montrer que la matrice B_n a, lorsque $n \to +\infty$, une limite que l'on calculera.

Partie B

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices de la forme $aI + bJ$; a et b étant réels.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble $\mathscr{M}_{2,2}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.

2. $\mathscr{E}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est-il un anneau ?

3. Soit $M = aI + bJ$ un élément de $\mathscr{E}$.
Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$ la matrice M^q peut s'écrire $M^q = a^q I + qa^{q-1} J$.

Partie C

$\overrightarrow{E}$ étant un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée directe $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère pour a, b fixés l'endomorphisme $f_{a,\,b}$ de $\overrightarrow{E}$ défini par la matrice $M = aI + bJ$.

1. Montrer que $f_{a,\,b}$ est un automorphisme de $\overrightarrow{E}$ si, et seulement si, $a \neq 0$.

2. Quelle est la matrice représentant $f_{a,\,b}$ quand on rapporte le plan à une nouvelle base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\jmath_1}\right)$ déduite de la première par une rotation vectorielle d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$?