Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Besançon juin 1976 ∾

EXERCICE 1

r est un nombre réel strictement positif et α un réel de $]-\pi\ ;\ \pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2r\cos\alpha z + r^2 = 0.$$

On appellera z_1 et z_2 les solutions et on précisera le module et l'argument de chacune.

2. Calculer z_1^n et z_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et déterminer $P_n = z_1^n + z_2^n$.
Cas particulier : $r = \dfrac{1}{2}$, $\quad \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.
Trouver une relation indépendante de n entre P_n et P_{n+3} dans ce cas ; quelle est alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n$?

EXERCICE 2

n est un nombre entier strictement positif. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, où e est la base du logarithme népérien.

1. Démontrer que le nombre I_n existe pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ et qu'il est strictement positif.
Calculer I_1.
2. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $I_{n+1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n$.
(On pourra utiliser une intégration par parties).
Calculer alors I_2 et I_3.
3. Utiliser les résultats précédents pour calculer :

$$I = \int_0^1 \left(-x^3 + 2x^2 - x\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

PROBLÈME

Partie A

Soit un espace vectoriel réel E de dimension $n \leqslant 3$. On se propose de déterminer la dimension de E pour qu'il existe un endomorphisme φ de E tel que $\varphi \circ \varphi = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ (1) où Id_E désigne l'application identique de E.

1. Montrer que l'image par φ d'une droite vectorielle D est une droite vectorielle $\varphi(\mathrm{D})$, et que l'intersection de D et de $\varphi(\mathrm{D})$ est le vecteur nul (on pourra vérifier, $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur définissant D, que les réels α et β tels que $\alpha\overrightarrow{u} = \beta\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$ sont nécessairement nuls compte-tenu de (1)). En déduire, si un tel endomorphisme existe, que $n \geqslant 2$.
2. D étant une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, quelle est la dimension du sous-espace vectoriel F_D engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$? Quelle est l'image de F_D par φ ?

3. Soit $n = 2$. $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur non nul de E, montrer, si φ existe et vérifie (1), que $\left(\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ est une base de E ; quelle est la matrice de φ dans cette base ? Existe t-il des endomorphismes de E, de dimension 2, vérifiant la condition (1) ?
4. Soit $n = 3$. On suppose qu'il existe un endomorphisme φ de E vérifiant (1). $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur non-nul, montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que
$\left(\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right), \overrightarrow{v}\right)$ soit une base de E. Compte-tenu de l'expression de $\varphi\left(\overrightarrow{v}\right)$ dans cette base, quelle est la matrice de φ dans cette base ? En déduire une contradiction. Que peut-on en conclure ?

Partie B

P étant un espace affine associé à E espace vectoriel euclidien de dimension 2, on note $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de P.

1. Déterminer, à l'aide des matrices, les endomorphismes φ de E tels que
$\varphi \circ \varphi = -\text{Id}_\text{E}$. Préciser ceux qui sont orthogonaux.
2. Soit f_1 l'application de P dans P qui au point M de coordonnées $(x ; y)$ associe le point M? $\left(x' ; y'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & -y+1\\ y' & = & x-1\end{array}\right.$$

   a. Démontrer que f_1 est une rotation affine dont l'endomorphisme associé φ est tel que $\varphi \circ \varphi = -\text{Id}_\text{E}$.
   Préciser le centre A et l'angle de f_1.

   b. Soit (Γ) le cercle de centre B(0 ; 1) et de rayon 1. Déterminer l'image (Γ') de (Γ) par f_1.

   c. Soit I le milieu du segment $[M, M?]$. Déterminer l'ensemble décrit par I lorsque M décrit (Γ). (On pourra calculer les coordonnées de I ou définir géométriquement une application par laquelle I est image de M).

3. Soit f_2 l'application de P dans P qui au point M de coordonnées $(x ; y)$ associe le point $M'\left(x' ; y'\right)$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & -x+2y+1\\ y' & = & -x+y+1\end{array}\right.$$

   a. Démontrer que f_2 est une application affine dont l'endomorphisme associé φ est tel que φ est tel que $\varphi \circ \varphi = -\text{Id}_\text{E}$.

   b. Quel est l'ensemble des points invariants ?

   c. Par quelle transformation passe-t-on de M à $M'' = f_2 \circ f_2(M)$?

   d. Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x fait correspondre :

$$y = \frac{x-1+\sqrt{x^2-2x+4}}{3}.$$

   Étudier cette fonction et la représenter dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On appelle (C) la représentation graphique.

   e. Déterminer l'image (C') de (C) par f_2. Tracer la dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ après avoir reconnu cette courbe (C').

N. B. - Les parties A, B, C peuvent être traitées de façon indépendante.