Baccalauréat C Besançon juin 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ telle que :

$$P(z) = z^3 + 2(3-2\text{i})z^2 + (8-15\text{i})z + 3 - 11\text{i}.$$

1. z étant un réel, calculer, en fonction de z, la partie réelle et la partie imaginaire de $P(z)$.
   En déduire l'existence d'un réel unique z_0 tel que $P(z_0) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des racines (réelles ou complexes) de l'équation
   $P(z) = 0$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans l'espace affine euclidien E_3 rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère le plan P d'équation : $2x + y - z + 3 = 0$.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P.

1. M étant un point de E_3 de coordonnées $(a~;~b~;~c)$, déterminer les coordonnées $\left(a'~;~b'~;~c'\right)$ du point M' image par s du point M.
2. On considère la droite D passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$:

$$\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}.$$

   Déterminer des équations paramétriques de la droite D′ ensemble des images par s des points de D.

PROBLÈME **12 POINTS**

N. B. - Les fonctions considérées dans ce problèmes sont des fonctions numériques d'une variable réelle

Partie A

1. Soit f la fonction de $[-\pi~;~+\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \text{tg}\, x.$$

   a. Étudier la variation de f.

   b. Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet, sur $[-\pi~;~+\pi]$, trois racines distinctes.
   Soit x_1 la racine strictement positive. Démontrer que : $\dfrac{7\pi}{12} < x_1 < \dfrac{2\pi}{3}$.
   (on vérifiera que : $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$)

2. Soit g la fonction définie sur $[-\pi~;~+\pi]$ par : $g(x) = x\sin x$.

   a. Étudier la variation de g, et tracer la représentation graphique de g dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

b. Calculer l'aire de la partie du plan, ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lllll} -\pi & \leqslant & x & \leqslant & +\pi \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & g(x) \end{array}\right.$$

Partie B

1. Soit h la fonction définie sur $[-\pi\,;\,+\pi]$ par :

$$h(x) = x\sin\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \text{ et } h(0) = 0.$$

a. h est·elle continue sur $[-\pi\,;\,+\pi]$?

b. h est-elle dérivable sur $[-\pi\,;\,+\pi]$?

2. Soit k la fonction définie sur $[-\pi\,;\,+\pi]$ par :

$$k(x) = x\sin x\sin\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \text{ et } k(0) = 0.$$

a. k est·elle continue sur $[-\pi\,;\,+\pi]$?

b. k est·elle dérivable sur $[-\pi\,;\,+\pi]$?

3. On considère la suite (U) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par :

$$U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{p}{n^2}\sin\frac{p}{n}\sin\frac{n}{p}$$

Démontrer qu'elle est convergente, en faisant intervenir la valeur moyenne de k sur $[0\,;\,1]$. (on ne calculera pas explicitement la valeur de cette limite).

Partie C

Soit φ la fonction définie sur $[-\pi\,;\,+\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \cos x\cos\frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \text{ et } \varphi(0) = 0.$$

1. Montrer que φ est majorée et minorée sur $[-\pi\,;\,+\pi]$ (on ne demande pas d'étudier la continuité de φ en 0).

Soit $t \in]0\,;\,\pi]$: montrer que φ est intégrable sur $[t\,;\,\pi]$.

On pose alors $\quad \Phi(t) = \displaystyle\int_t^\pi \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Soit ψ la fonction définie sur $]0\,;\,\pi]$ par :

$$\psi(x) = \frac{1}{x^2}\sin x\sin\frac{1}{x}.$$

Démontrer qu'il existe une fonction Ψ, définie sur $]0\,;\,\pi]$ par :

$$\Psi(t) = \int_t^\pi \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Préciser la fonction Ω définie sur $]0\,;\,\pi]$ par :

$$\Omega(t) = \Phi(t) + \Psi(t).$$

(on pourra utiliser une intégration par parties portant sur $\Phi(t)$).

4. On admet que $\Phi(t)$ tend vers une limite quand t tend vers 0.

Démontrer l'existence d'une fonction Ψ_1 définie et continue sur $[0\,;\,\pi]$ et qui coïncide sur $]0\,;\,\pi]$ avec la fonction Ψ.