∽ Baccalauréat C Besançon juin 1978 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

a et b étant deux entiers naturels premiers vérifiant $a > b$, trouver tous les couples $(x~;~y)$ éléments de $\mathbb{N}^{\star} \times \mathbb{N}^{\star}$ tels que :

$$x^2 - y^2 = a^2b^2.$$

Applications : Déterminer l'ensemble des couples $(x~;~y)$ dans les deux cas suivants :
$(a~;~b) = (7~;~2)$
$(a~;~b) = (11~;~5)$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Le plan vectoriel E est rapporté à la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\imath}\right)$. Soit f l'application linéaire de E dans E dont la matrice, dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\imath}\right)$ est :

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de E tels que la famille $\left(\vec{v}~;~f\left(\vec{v}\right)\right)$, soit une famille liée et vérifier que c'est une droite vectorielle.
2. Soit $\vec{\imath'} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
   Après avoir vérifié que $\left(\vec{\imath'},~\vec{\imath}\right)$ est une base de E, donner la matrice de f dans la base $\left(\vec{\imath'},~\vec{\imath}\right)$.
3. Montrer alors que f est la composée de deux symétries vectorielles f_1 et f_2 $(f = f_2 \circ f_1)$ telles que $f_1\left(\vec{\imath'}\right) = f_2\left(\vec{\imath'}\right) = \vec{\imath'}$ et $f_1\left(\vec{\jmath}\right) = -\vec{\jmath}$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

1. f est une application dérivable de $\mathbb{R}_+^{\star}$ dans $\mathbb{R}$; a est un réel strictement positif donné. Soit g_a l'application de $\mathbb{R}_+^{\star}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

   $$x \longmapsto g_a(x) = f(ax) - f(x).$$

   Montrer que g_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^{\star}$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. On se propose de déterminer l'ensemble $(\mathscr{F})$ des applications f de $\mathbb{R}_+^{\star}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}_+^{\star}$, vérifiant la propriété suivante :

   $$\forall (x~;~y) \in \mathbb{R}_+^{\star} \times \mathbb{R}_+^{\star}, \quad f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

   a. Vérifier que pour tout réel k, la fonction k Log appartient à $(\mathscr{F})$. (Log désigne la fonction logarithme népérien).
   b. Si f est un élément de $(\mathscr{F})$ montrer que $f(1) = 0$.
   c. Si f est un élément de $(\mathscr{F})$ que peut-on dire de toute fonction g_a introduite au 1. En déduire que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^{\star}, \quad af'(a) - f'(1) = 0$.
   d. Conclure alors que f est une fonction du type : $x \longmapsto k \mathrm{Log}\, x$. ($k$ étant une constante réelle), puis donner $(\mathscr{F})$.

Partie B

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices carrées

$$M(\alpha,\ \beta) = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & \alpha\end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^\star,\ \beta \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un groupe commutatif pour la multiplication $\times$ des matrices.
2. f est une application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$. Trouver la condition nécessaire et suffisante (2) que doit vérifier f pour que l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathcal{T}$ définie par : $a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0\\ f(a) & a\end{pmatrix}$ soit un homomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^\star,\ \times\right)$.
3. **a.** f étant de plus dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et vérifiant (2) ,soit h l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad h(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

   Montrer que : $h \in (\mathcal{F})$.

   b. En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, dérivables dans $\mathbb{R}_+^\star$ et vérifiant (2) est l'ensemble des applications :

$$x \longmapsto kx\text{Log}\, x \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Partie C

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. À tout réel $a \in \mathbb{R}_+$ on associe l'application affine φ_a de E dans E telle que $\varphi_a(0) = 0$ et dont l'endomorphisme associé a pour matrice $\begin{pmatrix} a & 0\\ a\text{Log}\, a & a\end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'ensemble des applications φ_a, $a \in \mathbb{R}_+^\star$ muni de la loi de composition des applications, est un groupe.
2. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$, définie dans $\mathcal{E}$ par :

$$\forall (M\,;\ M') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad M\mathcal{R}M' \iff \exists a \in \mathbb{R} : \quad M' = \varphi_a(M)$$

   est une relation d'équivalence.
3. Vérifier que la classe d'équivalence du point $M_0\left(x_0\,;\ y_0\right)$ avec $x_0 \neq 0$ est la courbe d'équation :

$$y = x\left(\frac{y_0}{x_0} + \text{Log}\,\frac{x}{x_0}\right).$$

4. Représenter la classe d'équivalence de $M_0(-2\,;\ 2)$. On pourra prendre un repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé.