

∞ Baccalauréat C Besançon, Lyon juin 1981 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

On désigne par S l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation (1)

$$138x - 55y = 5.$$

1. Montrer que si $(x_0; y_0)$ est élément de S alors $x_0 \equiv 0 \pmod{5}$.
2. Résoudre l'équation (1).
3. $(x_0; y_0)$ étant un élément de S , quelles sont les valeurs possibles du plus grand diviseur commun des deux termes du couple. Déterminer l'ensemble des éléments de S dont les termes sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans un plan affine euclidien \mathcal{P} , on considère un triangle ABC , rectangle en A , tel que $AC = 2AB = 2d$ (d réel strictement positif donné).

1.
 - a. Construire le point G_1 , barycentre des points pondérés $(A, 1)$ $(B, 2)$ $(C, 1)$.
 - b. Construire le point G_2 , barycentre des points pondérés $(A, 5)$ $(B, 2)$ $(C, -3)$.
 - c. Calculer G_1G_2 en fonction de d .
2.
 - a. Déterminer suivant la valeur du paramètre réel k la nature de l'ensemble

$$E_k = \{M \in \mathcal{P} / MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4k\}$$

- b. Construire $E_{\frac{3}{2}d^2}$.
3. Étudier suivant la valeur du réel positif a la nature de l'ensemble

$$C_a = \{M \in \mathcal{P} / MG_1 + MG_2 = 2a\}.$$

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

On désigne par I l'intervalle ouvert $] -1 ; 1[$.

1.
 - a. Vérifier que pour $s \in I$ et $t \in I$

$$1 + st \neq 0.$$

Pour toute la suite on pose

$$s \star t = \frac{s+t}{1+st} \text{ pour } s \in I \text{ et } t \in I.$$

- b. Soit $s \in I$ fixé; étudier les variations de la fonction $T_s : t \mapsto s \star t$ sur I . En déduire que la loi \star est interne dans I .

- c. Montrer que I muni de la loi \star est un groupe commutatif.
2. a. Donner le tableau de variations de la fonction G de \mathbb{R} eh - 1 dans \mathbb{R} qui à x associe

$$G(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

- b. On pose $g(x) = x - G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$; calculer $g(0)$ et déterminer le sens de variation de g ; en déduire que $G(x) \leq x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
- c. Démontrer que G est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur (I, \star) .
3. On note $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'application réciproque de G . Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit sur \mathbb{R} la fonction F_a par $F_a(x) = ax$ et on considère la fonction $f_a = G \circ F_a \circ H$ de I vers I . On ne cherchera pas à calculer H et f_a dans cette question.
- a. Montrer que pour $a \geq 0$, f_a est croissante sur I .
Soit a et b deux réels fixés.
- b. Démontrer que pour tout $t \in I$, on a

$$f_{a+b}(t) = f_a(t) \star f_b(t).$$

- c. On suppose que $a \leq b$ et $t \in [0; 1[$. En utilisant 2. a. montrer que $H(t) \geq 0$ et en déduire que $f_a(t) \leq f_b(t)$.

Partie B

À tout réel $a \geq 0$ on associe l'application $\varphi_a : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \varphi_a(t) &= \frac{(1+t)^a - (1-t)^a}{(1+t)^a + (1-t)^a} & \text{si } a > 0 \\ \varphi_a(0) &= 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que chaque fonction φ_a est continue sur l'intervalle $[0; 1]$. Quelle est la valeur de $\varphi_a(1)$?
- b. Démontrer que $H(t) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+t}{1-t}$ pour tout $t \in I$.
En déduire que pour tout $a \geq 0$ et tout $t \in [0; 1[$ on a $f_a(t) = \varphi_a(t)$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ on pose

$$J(a) = \int_0^1 \varphi_a(t) dt.$$

Calculer $J(0)$; $J(1)$; $J(2)$.

Montrer, en utilisant la question B 1. b. que la fonction $J : a \rightarrow J(a)$ est croissante sur \mathbb{R}_+ . Quel est le signe de $J(a)$ pour $a \geq 0$?

3. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.
- a. Montrer que

$$\begin{aligned} \text{si } t \in [0; 1-a] & \text{ alors } \varphi_a(t) \leq f_a(1-a), \\ \text{si } t \in]1-a; 1] & \text{ alors } \varphi_a(t) \leq 1 \end{aligned}$$

- b. En déduire, ainsi que de A 2. b., l'inégalité

$$J(a) \leq \frac{a}{2} \text{Log} \frac{2-a}{a} + a.$$

- c. En déduire que J est continue à droite en 0.
4. a. Démontrer, à l'aide de A 3. b., que pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$ on a

$$\varphi_{a+b}(t) \leq \varphi_a(t) + \varphi_b(t) \quad \text{pour tout } t \in [0; 1].$$

En déduire que $J(a+b) \leq J(a) + J(b)$.

- b. Montrer que la fonction J est continue à droite en tout point $a \geq 0$.