Durée : 4 heures

Baccalauréat C 1985 Besançon [1]

EXERCICE 1 **5 points**

Soit $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan, A_0 le point d'affixe 6 et s la similitude de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
On pose $A_{n+1} = s(A_n)$ pour $n = 0, 1, \ldots, 12$.

1. Déterminer en fonction de n l'affixe du point A_n et vérifier que A_{12} appartient à la demi-droite $\left(O,\,\vec{\imath}\right)$.
2. Établir que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}. Représenter les points A_0, A_1, ..., A_{12} (on ne demande pas de calculer explicitement leurs coordonnées) et tracer les segments OA_0, OA_1, ..., OA_{12} et A_0A_1, A_1A_2,..., $A_{11}A_{12}$.
3. Calculer la longueur du segment A_0A_1. En déduire la longueur ℓ de la ligne polygonale $A_0A_1A_2\ldots A_{12}$. Donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R (R > 0) et soient A et B deux points diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$.

1. Pour tout point M de $\mathscr{C}$, distinct de A et B, on construit le point Q tel que MABQ soit un parallélogramme.
   Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment [MQ], puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BMQ lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.
2. On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM).
   Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ?
   Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé des points A et B.
3. On considère les cercles circonscrits aux triangles OBP et MNP.
   a. Pourquoi ces cercles ne sont-ils pas tangents en P ?
   b. On note K l'autre point commun de ces deux cercles. En utilisant les angles orientés de droites égaux à $\left(\widehat{KB,\,KP}\right)$ et $\left(\widehat{KP,\,KM}\right)$, montrer que les points K, A, B, M sont cocycliques.

PROBLÈME **10 points**

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions f_λ définies par :

$$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$$

où λ est un nombre réel non nul.

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

La partie I est essentiellement consacrée à la recherche du nombre de points d'intersection de la courbe représentative $\mathscr{C}_\lambda$ de f_λ, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. La partie II donne une méthode de calcul approché de l'abscisse de ces points dans le cas particulier où $\lambda = 1$.

I.

1. Donner l'ensemble de définition de f_λ (on distinguera les deux cas : $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$).
2. **a.** Existe-t-il un lien entre les deux courbes $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{C}_{-\lambda}$?

   b. Soit Γ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Trouver, lorsque $\lambda > 0$, une translation qui transforme Γ en $\mathscr{C}_\lambda$.
3. On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

   a. On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition. En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{D}$.

   b. On suppose $\lambda > 0$. Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition (on pourra par exemple mettre x en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer la limite à l'infini).
   Établir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$, quand x décrit le domaine de définition de φ_λ, est $m(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \ln \lambda$.

   c. Étudier, quand λ décrit $]0~;~+\infty[$, les variations de $m(\lambda)$; en déduire son signe.

   d. Combien, lorsque λ est positif, $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{D}$ ont-elles de points communs ?

II. Étude du cas particulier : $\boldsymbol{\lambda = 1}$

1. **a.** Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}_1$ et la droite $\mathscr{D}$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; on prendra comme unité 3 cm.

   b. On appelle P et Q les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{D}$. P est le point d'abscisse négative p, Q le point d'abscisse positive q.
   Démontrer que : $2 < q < 3$.
2. On se propose de calculer une valeur approchée de q. On définit la suite u par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}u_0 &=& 2\\ u_{n+1} &=& f_1\left(u_n\right) \quad \text{pour tout } n \text{ de } N.\end{array}\right.$$

   a. Représenter à l'aide de la courbe $\mathscr{C}_1$ les termes u_0, u_1, u_2 sur $\left(\text{O},~\vec{\imath}\right)$.

   b. Montrer que la suite u est croissante et majorée par q.

   c. Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité des accroissements finis, que :

$$q - u_{n+1} \leqslant \frac{q - u_n}{3} \quad \text{pour tout } n \text{ de } N.$$

   d. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $q - u_n \leqslant \dfrac{q - u_0}{3^n}$ et que la suite u converge vers q.

   e. Déterminer une valeur approchée de q à 10^{-2} près en justifiant la méthode choisie.
3. L'unité d'aire étant le cm^2, calculer en fonction de p et de q l'aire comprise entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = p$ et $x = q$.