

∞ Baccalauréat C Besançon juin 1986¹ ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Déterminer le solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

vérifiant : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Étudier les variations de cette fonction, et en tracer la courbe représentative (sur papier ordinaire) dans un repère orthonormé du plan (unité de longueur : 2 cm).

2. Pour n entier naturel, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = xe^{-2^n x}.$$

Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(2x)$.

On désigne par \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n (dans le même repère). Par quelle transformation simple passe-t-on de \mathcal{C}_n à \mathcal{C}_{n+1} ?

3. Calculer : $A_0 = \int_0^1 f_0(x) dx$.

On pose plus généralement : $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Comparer A_n et A_{n+1} .

Quelle est la nature de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère dans le plan \mathcal{P} un triangle ABC non aplati. B' désigne le milieu de [AC], C' celui de [AB] et D le barycentre du système $\{(A, 3); (B, 2)\}$. Soit I le barycentre du système $\{(A, 2)(B, 2)(A, 1)(C, 1)\}$.

1. Montrer que I est le barycentre du système $\{(B', 1)(C', 2)\}$ et également du système $\{(D, 5)(C, 1)\}$.

En déduire que I est le point d'intersection des droites (B'C') et (CD).

2. La droite (AI) coupe la droite (BC) en E. Déterminer la position de E sur (BC). (On pourra utiliser le fait que I est le barycentre de $\{(B', 1)(C', 2)\}$.)

3. B et C restent fixes. Le point A se déplace dans le plan P, le segment [AE] conservant une longueur constante. Déterminer les lieux géométriques des points I et D. (On utilisera des homothéties.)

1. Dijon - Grenoble - Lyon - Metz - Nancy - Reims - Strasbourg

PROBLÈME**4 POINTS****I. Partie préliminaire**

Factoriser dans R , le polynôme $2x^2 - x\sqrt{2} - 1$, et étudier, sur l'intervalle $[0; \pi]$, le signe de l'expression :

$$f(\theta) = 2\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta - 1;$$

on introduira dans cette étude l'unique réel $\theta_0 \in]0; \pi[$ tel que : $\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{0}}{4}$.

(Pour la suite du problème, on considèrera que θ_0 radians correspondent approximativement à 116 degrés).

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur est le centimètre; on considère le point d'affixe -4 et le cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon $4\sqrt{2}$.

Objet du problème : à tout réel θ on associe le point $P(\theta) \in \mathcal{C}$ tel que θ soit une mesure en radians de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{AP(\theta)})$. Soit $T(\theta)$ la tangente à \mathcal{C} au point $P(\theta)$; on appelle $M(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur $T(\theta)$.

On se propose d'étudier le lieu \mathcal{L} des points $M(\theta)$ lorsque θ décrit R .

- 1. a.** Représenter graphiquement sur papier millimétré, avec le plus grand soin, les points $P(\theta)$ et $M(\theta)$ obtenus pour

$$\theta \in \left\{ 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \theta_0 \right\}.$$

On disposera ainsi des premiers éléments d'une figure destinée, sous le nom de « figure 1 » à être complétée aux questions II 2. c., II 2. d. et II 3.

- b.** Démontrer que la droite (OA) est un axe de symétrie de \mathcal{L} .

- c.** θ étant quelconque, on note $\vec{u}(\theta)$ le vecteur unitaire tel que : $(\vec{i}, \vec{u}(\theta)) = \theta$, et $H(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur la droite (AP(θ)).

Représenter O, A, \mathcal{C} , $P(\theta)$, $T(\theta)$, $M(\theta)$, $\vec{u}(\theta)$, $H(\theta)$ sur une nouvelle figure (figure 2) devant être complétée à la question II 4. b.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AP(\theta)}$ et $\overrightarrow{AH(\theta)}$ au moyen du vecteur $\vec{u}(\theta)$; en déduire que les coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ du point $M(\theta)$ sont données par :

$$\begin{cases} x(\theta) = 4(\sqrt{2} - \cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = 4(\sqrt{2} - \cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

- d.** Démontrer que l'affixe $m(\theta)$ du point $M(\theta)$ est donné par :

$$m(\theta) = 4\sqrt{2}e^{i\theta} - 2e^{2i\theta} - 2 \quad (i \in \mathbb{C}, i^2 = -1).$$

- e.** De même, démontrer que l'affixe $h(\theta)$ du point $H(\theta)$ est donnée par :

$$h(\theta) = -2 + 2e^{2i\theta}.$$

2. Construction de \mathcal{L} :

- a.** Expliquer pourquoi on peut, dans un premier temps, se limiter au cas où : $\theta \in [0 ; \pi]$.
- b.** Étudier les variations, sur $[0 ; \pi]$ des fonctions $\theta \rightarrow x(\theta)$ et $\theta \rightarrow y(\theta)$.
(On établira en particulier que : $y'(\theta) = -4f(\theta)$, avec les notations de la partie I.)
- c.** Représenter sur la figure 1 les tangentes à \mathcal{L} aux points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M(\theta_0)$, $M(\pi)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
(On rappelle que la tangente à \mathcal{L} au point $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'', y'(\theta))$, noté $\frac{d\mathbf{M}}{d\theta}(\theta)$, si ce vecteur est non nul.)
- d.** Achever le tracé de \mathcal{L} , en se conformant aux résultats précédents.

3. Construction de la tangente en un point quelconque de \mathcal{L} . Démontrer que l'affixe du vecteur $\frac{d\mathbf{M}}{d\theta}(\theta)$ s'obtient en multipliant par i l'affixe du vecteur $\overrightarrow{H(\theta)M(\theta)}$.

Interpréter géométriquement, et en déduire une construction pratique de la tangente à \mathcal{L} en n'importe quel point ; illustrer ce résultat (sur la figure 1) dans le cas particulier où $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

- 4.**
 - a.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'affixe $m(\theta + \pi)$ du point $M(\theta + \pi)$, et démontrer que l'affixe du milieu $K(\theta)$ du segment $[M(\theta)M(\theta + \pi)]$ est donnée par : $\ell(\theta) = -2(1 + e^{2i\theta})$.
 - b.** Démontrer que le lieu du point $L(\theta)$, lorsque θ décrit \mathbb{R} , est le cercle Γ de diamètre $[OA]$. Illustrer ce résultat, sur la figure 2.
 - c.** Démontrer que $H(\theta)$ est le point de Γ diamétralement opposé à $L(\theta)$.