Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C Besançon septembre 1969 ∾

EXERCICE 1

Calculer le plus grand diviseur commun des nombres

$$5\,145, \quad 4\,410 \quad \text{et} \quad 3\,675.$$

Résoudre l'équation :

$$3\,675x - 5\,145y = 4\,410,$$

où x et y appartiennent à $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels.
[On remarquera que ($x = 4$; $y = 2$) est une solution particulière de l'équation,]

EXERCICE 2

Démontrer que la fonction $(ax+b)\text{e}^x$ admet une primitive de la forme $(mx+p)\text{e}^x$.
En déduire les primitives des fonctions

$$(x-1)\text{e}^x \quad \text{et} \quad (2x-3)\text{e}^x.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
À tout nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$), on associe le point m de coordonnées x et y ; m est dit l'image de z ; z est dit l'affixe de m. On désigne par A, B, P, Q les images respectives des nombres -1, $+1$, $+\frac{1}{2}$, $+2$ et par (C) le cercle de diamètre AB.
À tout point m différent de Q on associe son affixe, z, puis le nombre complexe

$$Z = \frac{(2z-1)z}{z-2}$$

et enfin l'image, M, de Z. On désigne par T l'application qui à m associe M.

1. On suppose que m parcourt le segment AB. En étudiant, dans l'intervalle $[-1 ; +1]$, la fonction f de la variable réelle x, donnée par

$$f(x) = \frac{(2x-1)x}{2-x},$$

trouver l'ensemble transformé du segment AB par T.

2. Démontrer que Z peut s'écrire sous la forme

$$Z = az + b + \frac{c}{z-2}$$

a, b et c étant réels.
On pose $X = Z + \text{i}Y$, X et Y étant réels. Calculer Y en fonction de x et y et en déduire l'ensemble des positions de m telles que M appartienne à $x'x$.

3. On pose $Z_1 = \dfrac{2z-1}{2-z}\cdot$ Démontrer que

$$|Z_1| = 2\frac{m\mathrm{P}}{m\mathrm{Q}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}\, Z_1 = \left(\overrightarrow{m\mathrm{Q}},\ \overrightarrow{\mathrm{P}m}\right).$$

4. Montrer que, si m est intérieur à (C), c'est-à-dire si $|z| < 1$, alors $|Z_1| < 1$ et M est aussi intérieur à (C), puis que, si m est extérieur à (C), alors M est extérieur à (C).

5. On suppose que m appartient au demi-cercle (C') de diamètre AB qui contient l'image de i. On désigne par θ l'argument de $z\,(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ et par φ l'argument de Z_1. Montrer que $\sin\varphi \geqslant 0$.
On suppose $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Calculer $\cos\varphi$ en fonction de $\cos\theta$ et en déduire que φ est une fonction croissante de θ.