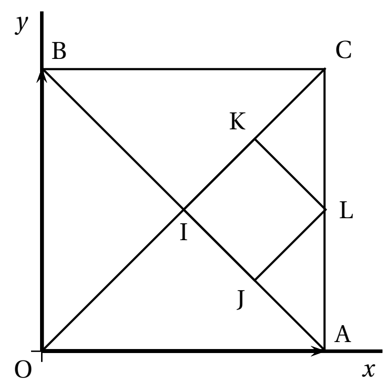
∽ Baccalauréat C Besançon [1] septembre 1973 ∾

EXERCICE 1

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et B le point de coordonnées (0 ; 1).
I est le centre du carré OBCA, K le milieu du segment IC et J le milieu du segment IA.
Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui transforme le carré OBCA en le carré IKLJ (les points O, B, C et A ayant respectivement pour images I, K L et J).
On admettra l'existence et l'unicité de cette similitude.



EXERCICE 2

On note $L_1(x) = \text{Log}\, x$ ($\text{Log}\, x$ désigne le logarithme népérien de x) et pour tout entier n supérieur à 1,

$$L_n(x) = \text{Log}\,[L_{n-1}(x)]$$

Ainsi, $L_2(x) = \text{Log}\,(\text{Log}\, x)$.

1. Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$L_1, \quad L_2, \quad L_3, \quad \text{et } L_4.$$

2. Déterminer la fonction dérivée de L_n.

EXERCICE 3

Dans ce problème, e désigne la base des logarithmes népériens.

Partie A

Soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une base du plan vectoriel V.
Soit f l'application linéaire de V dans lui-même, qui donne pour image du vecteur $\vec{\imath} + \text{e}\vec{\jmath}$ le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et qui laisse invariant le vecteur $\vec{\imath}$.

1. Déterminer l'image de $\vec{\jmath}$ et la matrice de f dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
2. Quelles sont les droites vectorielles invariantes par f ?

Partie B

Soit P un plan affine associé à V et $\left(\text{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère de P. Soit l'application affine φ de P dans P déterminée par « quel que soit le point M de P, $\text{M}' = \varphi(\text{M})$ est défini par $f\left(\overrightarrow{\text{OM}}\right) = \overrightarrow{\text{OM}'}$ ».

1. Nancy–Metz, Strasbourg

1. Vérifier que les coordonnées $(x' ; y')$ de M′ s'expriment en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M par

$$x' = x \quad \text{et} \quad y' = \mathrm{e}^{-1} y.$$

A et B étant deux points distincts quelconques du plan P, montrer que la droite passant par A et B et la droite passant par A′ et B′ sont parallèles ou bien se coupent sur $x'x$ (A′ et B′ sont les transformés respectifs de A et B par φ).

2. Soit (C) la courbe représentative dans $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{x+1}$.

Déterminer l'équation de la courbe (C′), image de (C) par φ).

Montrer que (C′) est aussi l'image de (C) par la translation t de vecteur $\vec{\imath}$.

En déduire le tracé de (C).

On tracera (C) et (C′) sur un même graphique.

Quel est l'ensemble décrit par l'intersection de la tangente à (C) en M avec la tangente à (C′) en φ(M), lorsque M décrit (C) ?

Partie C

On considère la fonction h définie par $h(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{E}(x)+1}$ où E(x) est la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier relatif immédiatement inférieur ou égal à x.

1. Représenter graphiquement h sur le même dessin que (C) et (C′).

Calculer $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} h(x)\,\mathrm{d}x$ (n étant un entier relatif).

Calculer, n étant un entier positif,

$$S_n = I_{-1} + I_{-2} + \ldots + I_{-n}$$

et la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Déterminer l'aire A_n du domaine plan fini compris entre (C), (C′), les droites d'équations $x = n$ et $x = n + 1$ (n entier naturel).

Quelle est la probabilité pour que, choisissant n au hasard dans l'intervalle [0 ; 10], on ait

$$A_n < 25 \text{ ?}$$