Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Besançon [1] septembre 1975 ∾

EXERCICE 1

Un joueur lance n fois une pièce non truquée. Il reçoit 1 franc chaque fois qu'il obtient pile et il perd 1 franc chaque fois qu'il obtient face.
Soit y un entier relatif compris entre $-n$ et n.
Quelle est la probabilité pour que son gain à l'issue des n coups soit égal à y ? (il est bien sûr entendu qu'un gain négatif correspond à une perte d'argent).

EXERCICE 2

Soit p et q deux nombres réels strictement positifs tels que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

1. Montrer que p et q sont strictement supérieurs à 1.
2. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x)=ax-\frac{x^q}{q},$$

   où a est un réel strictement positif, et calculer la valeur de son maximum.
   Indiquer l'allure de la courbe représentative de g.
3. En déduire que pour tous nombres réels positifs a et b, on a :

$$ab\leqslant\frac{a^q}{p}+\frac{b^q}{q}$$

   Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

PROBLÈME

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 rapporté à la base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Étant donné deux nombres réels a et b, on désigne par $\varphi_{a,\,b}$ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ défini par

$$\left\{\begin{array}{lcr}\varphi_{a,\,b}\left(\vec{\imath}\right)&=&(a-b)\vec{\imath}+b\vec{\jmath}\\\varphi_{a,\,b}\left(\vec{\jmath}\right)&=&b\vec{\imath}+(a-b)\vec{\jmath}\\\varphi_{a,\,b}\left(\vec{k}\right)&=&\vec{k}\end{array}\right.$$

Partie A

1. Montrer que $\varphi_{a,\,b}$ est bijectif si et seulement si $a(a-2b)\neq 0$.
2. Déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{a,\,b}$ lorsque $a(a-2b)=0$ (on distinguera trois cas).
   Montrer que dans tous les cas ce noyau et cette image sont supplémentaires.
3. Pour quelles valeurs de a et b l'endomorphisme $\varphi_{a,\,b}$ est-il une isométrie vectorielle ? Soit G_y l'ensemble de ces isométries :

1. Nancy - Reims et Strasbourg

a. Caractériser les éléments de G_y.

b. Dresser la table de composition des éléments de G_y. Qu'en déduisez-vous, quant à la structure de $\left(G_y, \circ\right)$?

Partie B

On considère désormais le cas particulier $a = 2, b = 3$ et l'on pose $\varphi = \varphi_{2,\,3}$.

1. Montrer qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et des nombres réels λ_1, λ_2 tels que

i) $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{k}\right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$

ii) $\varphi\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \lambda_1\overrightarrow{e_1}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \lambda_2\overrightarrow{e_2}$

iii) $\lambda_1 > \lambda_2$

On montrera que ces conditions déterminent λ_1, λ_2 de manière unique ; en est-il de même pour $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$?

Montrer enfin que si l'on impose la condition supplémentaire :

iv) $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{\imath} > 0$ et $\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{\imath} > 0$

les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont alors uniques. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ seront ainsi choisis dans ce qui suit.

2. Soit ϵ un espace affine euclidien dont $\mathcal{V}$ est l'espace vectoriel euclidien associé et $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{k}\right)$ un repère cartésien de ϵ.

On considère l'application affine f qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme d'espace vectoriel associé est φ.

a. Pourquoi f est-elle une application affine bijective ?

b. Déterminer analytiquement f et caractériser par une relation entre leurs coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ l'ensemble C des points M de ϵ tels que $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}f(M)}$ soient orthogonaux.

c. Reconnaître et donner les principales caractéristiques de l'intersection de C et du plan d'équation $z = \alpha$.

d. Même question pour l'intersection de C et du plan d'équation $y = \beta$.