

∞ Baccalauréat C Besançon¹ septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

Déterminer les paires $\{a ; b\}$ d'entiers naturels tels que $2m + 7d = 111$, m désignant le plus petit commun multiple, d désignant le plus grand commun diviseur de a et de b .

EXERCICE 2

f est la fonction définie par :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

1. Étudier les variations de cette fonction.
2. Dédire de la question précédente l'étude des variations des fonctions :

a. $g: x \in [0 ; 2\pi[$, $g(x) = \frac{e^{\cos x}}{\cos x}$;

b. $h: x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \frac{x}{\text{Log } x}$.

(Log désigne la fonction logarithme népérien.)

PROBLÈME

Soit (P) un plan affine euclidien orienté, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct de (P) . Pour tout couple $(x ; y)$ de nombres réels, le nombre complexe $x + iy$ est appelé affixe du point M de (P) de coordonnées x et y dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On appelle A le point d'affixe 2 et B le point d'affixe i .

Soit F l'application de (P) dans (P) qui associe à tout point M d'affixe z le point $M' = F(M)$ d'affixe z' tel que

$$z' = 2 - \frac{i}{2}(\bar{z} - 2)$$

(\bar{z} désigne le nombre conjugué de z).

Partie A

1. Déterminer le nombre réel strictement positif k et la droite (Δ) passant par A tels que F soit égale à la composée commutative de l'homothétie H de centre A , de rapport k et de la symétrie orthogonale S_Δ par rapport à la droite (Δ) .
2. a. Quelles sont les droites globalement invariantes par F ?
b. Quelles sont les droites orthogonales à leurs images par F ?
3. Soit $(y'y)$ la droite contenant le point O , de vecteur directeur \vec{e}_2 .
a. Quel est l'ensemble des affixes des points de $(y'y)$; en déduire l'image de $(y'y)$ par F .
b. En utilisant les nombres complexes, démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule Σ telle que pour tout point M de $(y'y)$ on ait :

$$\Sigma(M) = F(M)$$

Si z est l'affixe d'un point quelconque M de (P) , quelle est l'affixe du point $\Sigma(M)$? Donner les coordonnées du centre C de la similitude Σ , ainsi que le rapport et l'angle de Σ .

Démontrer que, pour tout point M de $(y'y)$, le cercle de diamètre MM' ($M' = F(M)$) contient les points B et C .

4. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $b < a$ et

$$(\Gamma) \text{ la courbe d'équation } \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

- Déterminer la nature de (Γ) et ses éléments de symétrie.
- Déterminer une équation cartésienne de (Γ') image de (Γ) par F . Quelle est la nature de (Γ') ?
Préciser ses éléments de symétrie.
- Tracer (Γ) et (Γ') lorsque $a = 2$ et $b = 1$.

Partie B

On pose $F^1 = F$, $F^2 = F \circ F$ et pour tout entier naturel n non nul, on pose $F^{n+1} = F \circ F^n$.

- Déterminer l'ensemble E des valeurs de l'entier naturel non nul n pour lesquelles F^n est une homothétie. Pour tout élément n de E , déterminer le centre et le rapport de l'homothétie F^n .
Montrer que, pour toute valeur n de $\mathbb{N} - E$, F^n est la composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.
- O étant l'origine du repère, on pose $O_1 = F(O)$ et pour tout entier naturel non nul n , on pose $O_{n+1} = F(O_n)$.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul, le point O_n appartient à la réunion de deux demi-droites d'origine A .
- Pour tout entier naturel non nul n , on appelle z_n l'affixe du point O_n et on pose $u_n = z_n - 2$ et $v_n = |u_n|$.
Calculer u_n en fonction de n et du rapport k de l'homothétie H , montrer que v_n est terme général d'une suite géométrique.

$$\text{On pose } \sigma_n = \sum_{k=1}^n v_k. \text{ Calculer } \sigma_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n.$$

Partie C

En utilisant les nombres complexes, déterminer l'ensemble \mathcal{H} des similitudes directes S permutant avec F (S vérifie $S \circ F = F \circ S$).

Quelle est la structure de \mathcal{H} munie de la loi notée \circ de composition des applications?