

♣ Baccalauréat C Besançon¹ septembre 1980 ♣

EXERCICE 1

n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.

1. Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(s) = (1 + s)^n.$$

Exprimer $f(s)$ en utilisant le développement du binôme de Newton. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^n C_n^k$$

2. α désignant un réel fixé, on pose, pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, $p_k = \alpha C_n^k$. Déterminer α pour que les p_k définissent une loi de probabilité de la variable aléatoire X dont les valeurs sont $0, 1, 2, \dots, n$ telle que, pour tout k , $p(X = k) = p_k$. Cette valeur sera prise dans la suite de l'exercice. .
3. On considère l'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(s) = \sum_{k=0}^n p_k s^k.$$

Comparer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X et le nombre dérivé de la fonction g au point 1.

Trouver pour tout s réel une expression simple de $g(s)$, puis de $g'(s)$. En déduire la valeur numérique de $E(X)$.

EXERCICE 2

P est un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Un point M est mobile dans P et sa position à l'instant t est donnée par ses coordonnées

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = (1+t)e^{-t} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

On prendra pour e la valeur approchée 2,7.

1. Soit C la trajectoire de M ; former l'équation de C sous la forme $y = f(x)$, et construire C (l'unité sera représentée par 5 cm).
2. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}(t)$ de M à l'instant t . Montrer que, de $t_1 = 0$ à $t_2 = 1$ le mouvement est accéléré.
À quel instant, $\overrightarrow{V}(t)$ et $\overrightarrow{\Gamma}(t)$ sont-ils colinéaires? Quelle est alors la position de M ?

PROBLÈME

E désigne un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée

$$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

\mathcal{L} désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E .

1. Grenoble, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

Partie A

Soit P le plan vectoriel qui a pour équation $x + 2y + 3z = 0$.

1. p désignant la projection vectorielle orthogonale de E sur P , écrire en fonction des coordonnées (x, y, z) d'un vecteur \vec{V} les coordonnées (x', y', z') du vecteur $\vec{V}' = p(\vec{V})$.
2. On considère l'application q de E dans E définie par

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{V}_1 = q(\vec{V}) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}.$$

avec

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{14}(x + 2y + 3z), \\ y_1 &= \frac{1}{7}(x + 2y + 3z) \\ z_1 &= \frac{3}{14}(x + 2y + 3z), \end{cases}$$

Montrer que q est une projection vectorielle que l'on définira par son image et son noyau.

3. Identifier les endomorphismes $p + q$, $p \circ q$, $q \circ p$.

Partie B

On considère l'ensemble A des endomorphismes $ap + bq$ où (a, b) décrit \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de \mathcal{L} ; quelle en est la dimension?
2. Déterminer noyau et image de $ap + bq$, selon les valeurs de a et b .
3. Montrer que les homothéties vectorielles appartiennent à A .
4. Montrer que la composée de deux éléments de A est un élément de A ; en déduire que $(A, +, \circ)$ est un anneau commutatif unitaire.
5. Montrer que A contient quatre projections vectorielles seulement.
6. Quels sont les éléments involutifs de A ?

N. B. - La partie B peut se traiter sans utiliser les expressions analytiques de p et de q .