Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1981 Besançon [1]

EXERCICE 1

Soit $(a\ ;\ b)$ un couple d'entiers naturels non nuls; on note m leur plus petit commun multiple et d leur plus grand commun diviseur.
Exprimer, à l'aide de d, les couples $(a\ ;\ b)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l c l} b-a & = & d\\ b^2-a^2 & = & m-d^2.\end{array}\right.$$

EXERCICE 2

1. Soit P un plan vectoriel rapporté à la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   Pour tout réel λ, on note f_λ l'application de P dans P qui fait correspondre au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le vecteur $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ définies par

   $$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \lambda x+(1-\lambda)y\\ y' & = & (1+\lambda)x-\lambda y.\end{array}\right.$$

   Démontrer que, pour tout réel λ, f_λ est un endomorphisme involutif que l'on précisera.
2. Soit $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$.
   Démontrer que $g_\lambda = \mathrm{Id}_\mathrm{P} + \lambda.h$, où h désigne un endomorphisme tel que $h\circ h$ est l'application nulle.
   Soit $G = \left\{g_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Démontrer que l'ensemble G, muni de la loi de composition des applications est un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$ muni de l'addition.

EXERCICE 2

Partie A

On appelle f la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}$$

où e représente la base du logarithme nepérien.

1. Déterminer les variations de la fonction f.
   Etudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.
   Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (Unité : 4 cm.)
   Préciser le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

1. Grenoble, Dijon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

2. Soit t un réel inférieur à Log $\dfrac{1}{2}$. Calculer, en cm^2, l'aire $a(t)$ du domaine plan $\mathcal{D}_t$, défini par

$$\left\{\begin{array}{lllll} t & \leqslant & x & \leqslant & \text{Log}\,\dfrac{1}{2}\\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & 0.\end{array}\right.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} a(t)$.

3. Soit $\text{I} = \left[\text{Log}\,\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

a. On appelle g l'application de I dans $f(\text{I})$ qui, à x, associe $g(x) = f(x)$.
Justifier l'existence de g^{-1}, application réciproque de g. Pour x élément de $f(\text{I})$, expliciter $g^{-1}(x)$.

b. Construire la représentation graphique (Γ) de g^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
En déduire l'aire en cm^2 du domaine défini par

$$\left\{\begin{array}{lllll} -\dfrac{1}{8} & \leqslant & x & \leqslant & 0\\ \text{Log}\,\dfrac{1}{4} & \leqslant & y & \leqslant & g^{-1}(x)\end{array}\right.$$

4. Démontrer que, pour tout réel x_0, strictement supérieur à $\left(-\dfrac{1}{8}\right)$ l'équation

$$\left(x_0 + \frac{1}{8}\right) g^{-1}(x) = \int_{-\frac{1}{8}}^{x_0} g^{-1}(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'inconnue réelle x, admet une solution unique comprise entre $\left(-\dfrac{1}{8}\right)$ et x_0.

Partie B

Soit n entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p p\mathrm{e}^{px}.$$

1. Démontrer que la primitive F_n de f_n qui s'annule pour $x = 0$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_n(x) = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} + \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

2. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{(n+2)x} + (-1)^n (n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2}.$$

3. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n, non nul, par

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{p}{n^p}.$$

En utilisant ce qui précède, montrer que

$$u_n = \frac{(-1)^n \dfrac{n+2}{n^{n+1}} - \dfrac{1}{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Dans tout le problème la notation Log x représente le logarithme népérien du réel x.