Baccalauréat C Besançon [1] juin 1986

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

vérifiant : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Étudier les variations de cette fonction, et en tracer la courbe représentative (sur papier ordinaire) dans un repère orthonormé du plan (unité de longueur : 2 cm).

2. Pour n entier naturel, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f n_n(x) = x\text{e}^{-2^n x}.$$

Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(2x)$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n (dans le même repère). Par quelle transformation simple passe-t-on de $\mathscr{C}_n$ à $\mathscr{C}_{n+1}$?

3. Calculer : $\text{A}_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\text{d}x$.

On pose plus généralement : $A_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\text{d}x$.

Comparer A_n et A_{n+1}.

Quelle est la nature de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle ABC non aplati. B′ désigne le milieu de [AC], C′ celui de [AB] et D le barycentre du système {(A, 3) ; (B, 2)}. Soit I le barycentre du système {(A, 2)(B, 2)(A, 1)(C, 1)}.

1. Montrer que I est le barycentre du système $\{(\text{B}', 1)\ (\text{C}', 2)\}$ et également du système {(D, 5) (C, 1)}.

En déduire que I est le point d'intersection des droites (B′C′) et (CD).

2. La droite (AI) coupe le droite (BC) en E. Déterminer la position de E sur (BC). (On pourra utiliser le fait que I est le barycentre de {(B′, 1)(C′, 2)}.

3. B et C restent fixes. Le point A se déplace dans le plan P, le segment [AE] conservant une longueur constante. Déterminer les lieux géométriques des points I et D. (On utilisera des homothéties.)

1. Dijon - Grenoble - Lyon - Metz - Nancy - Reims - Strasbourg

PROBLÈME **4 POINTS**

I. Partie préliminaire

Factoriser dans R, le polynôme $2x^2 - x\sqrt{2} - 1$, et étudier, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, le signe de l'expression :

$$f(\theta) = 2\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta - 1\,;$$

on introduira dans cette étude l'unique réel $\theta_0 \in]0 ; \pi[$ tel que : $\cos\theta_0 = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{0}}{4}$.
(Pour la suite du problème, on considèrera que θ_0 radians correspondent approximativement à 116 degrés).

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, l'unité de longueur est le centimètre ; on considère le point d'affixe -4 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $4\sqrt{2}$.

Objet du problème : à tout réel θ on associe le point $\text{P}(\theta) \in \mathscr{C}$ tel que θ soit une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\text{AP}(\theta)}}\right)$. Soit $\text{T}(\theta)$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point $\text{P}(\theta)$; on appelle $\text{M}(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur $\text{T}(\theta)$.
On se propose d'étudier le lieu $\mathscr{L}$ des points $\text{M}(\theta)$ lorsque θ décrit R.

1. **a.** Représenter graphiquement sur papier millimétré, avec le plus grand soin, les points $\text{P}(\theta)$ et $\text{M}(\theta)$ obtenus pour

$$\theta \in \left\{0,\, \pi,\, \frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{4},\, \frac{3\pi}{4},\, \frac{5\pi}{6},\, \theta_0\right\}.$$

On disposera ainsi des premiers éléments d'une figure destinée, sous le nom de « figure 1 » à être complétée aux questions II 2. c., II 2. d. et II 3.

b. Démontrer que la droite (OA) est un axe de symétrie de $\mathscr{L}$.

c. θ étant quelconque, on note $\overrightarrow{u}(\theta)$ le vecteur unitaire tel que : $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}(\theta)\right) = \theta$, et $\text{H}(\theta)$ le projeté orthogonal de O sur la droite $(\text{AP}(\theta))$.

Représenter O, A, $\mathscr{C}$, $\text{P}(\theta)$, $\text{T}(\theta)$, $\text{M}(\theta)$, $\overrightarrow{u}(\theta)$, $\text{H}(\theta)$ sur une nouvelle figure (figure 2) devant être complétée à la question II 4. b.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\text{AP}(\theta)}$ et $\overrightarrow{\text{AH}(\theta)}$ au moyen du vecteur $\overrightarrow{u}(\theta)$; en déduire que les coordonnées $(x(\theta),\ y(\theta))$ du point $\text{M}(\theta)$ sont données par :

$$\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = 4(\sqrt{2} - \cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = 4(\sqrt{2} - \cos\theta)\sin\theta. \end{array}\right.$$

d. Démontrer que l'affixe $m(\theta)$ du point $\text{M}(\theta)$ est donné par :

$$m(\theta) = 4\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\theta} - 2\text{e}^{2\text{i}\theta} - 2 \quad (\text{i} \in \mathbb{C},\ \text{i}^2 = -1).$$

e. De même, démontrer que l'affixe $h(\theta)$ du point $\text{H}(\theta)$ est donnée par :

$$h(\theta) = -2 + 2\text{e}^{2\text{i}\theta}.$$

2. Construction de $\mathscr{L}$:

a. Expliquer pourquoi on peut, dans un premier temps, se limiter au cas où : $\theta \in [0~;~\pi]$.

b. Étudier les variations, sur $[0~;~\pi]$ des fonctions $\theta \to x(\theta)$ et $\theta \to y(\theta)$.
(On établira en particulier que : $y'(\theta) = -4f(\theta)$, avec les notations de la partie I.)

c. Représenter sur la figure 1 les tangentes à $\mathscr{L}$ aux points $\mathrm{M}(0)$, $\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{M}(\theta_0)$, $\mathrm{M}(\pi)$, $\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
(On rappelle que la tangente à $\mathscr{L}$ au point $\mathrm{M}(\theta)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(x'',~ y'(\theta)\right)$, noté $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{dM}}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$, si ce vecteur est non nul.)

d. Achever le tracé de $\mathscr{L}$, en se conformant aux résultats précédents.

3. Construction de la tangente en un point quelconque de $\mathscr{L}$. Démontrer que l'affixe du vecteur $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{dM}}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ s'obtient en multipliant par i l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{H}(\theta)\mathrm{M}(\theta)}$.
Interpréter géométriquement, et en déduire une construction pratique de la tangente à $\mathscr{L}$ en n'importe quel point; illustrer ce résultat (sur la figure 1) dans le cas particulier où $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

4. **a.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'affixe $m(\theta+\pi)$ du point $\mathrm{M}(\theta+\pi)$, et démontrer que l'affixe du milieu $\mathrm{K}(\theta)$ du segment $[\mathrm{M}(\theta)\mathrm{M}(\theta+\pi)]$ est donnée par : $\ell(\theta) = -2\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\right)$.

b. Démontrer que le lieu du point $\mathrm{L}(\theta)$, lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, est le cercle Γ de diamètre [OA]. Illustrer ce résultat, sur la figure 2.

c. Démontrer que $\mathrm{H}(\theta)$ est le point de Γ diamétralement opposé à $\mathrm{L}(\theta)$.