Baccalauréat - Besançon juin 1951

SÉRIE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1er sujet. - Résoudre et discuter l'équation

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

2e sujet. - Établir les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

entre les éléments d'un triangle.

3e sujet. Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.

Exercice 2

Soit une parabole (P). On appelle O le sommet, Ox l'axe, Dy la tangente au sommet, p le paramètre, F le foyer, D la directrice, A la projection de O sur D.
Un point M se déplace sur CP) de telle manière que sa projection H sur D ait un mouvement uniforme de vitesse p et se trouve en A au temps zéro.

1. Calculer les coordonnées x, y de M au temps t, les projections de son vecteur vitesse MV et de son vecteur accélération Mγ sur les axes.
2. On fait tourner MV d'un angle droit autour de M, dans le sens de Dy vers Ox. Le point V vient en N. Démontrer que N est sur Ox. En déduire une propriété connue de la sous-normale de la parabole.
3. Soit r la distance FM. Démontrer que la vitesse v de M vaut $\sqrt{2pr}$.
4. On appelle $\dfrac{1}{h}$ le temps que mettrait un point pour parcourir le segment AF d'un mouvement uniforme ayant la vitesse v du point M au temps t. On pose

   $$t_1 = t + h, \quad t_2 = t - h$$

   et l'on appelle M_1 et M_2 les positions de M aux temps t_1 et t_2, v_1, et v_2 les vitesses correspondantes. Calculer la distance M_1M_2.
   En déduire que la corde M_1M_2 passe par F.
   Démontrer que

   $$v_1^2 + v_2^2 = 4v^2$$

   et que M_1V_1 et M_2V_2 sont perpendiculaires.
5. Soit I le milieu de M_1M_2. On appelle K la position.de M au temps $2t$. Démontrer que I est homologue de K dans une homothétie de centre et de rapport fixes, que l'on déterminera.
   En déduire la trajectoire de I.
6. On appelle Q le point de rencontre de D avec la tangente en M à (P).
   Calculer son ordonnée Y et sa vitesse w. Vérifier que $y^2 = 4wx$.
   Démontrer que les points Q_1 et Q_2 correspondant à M_1 et M_2 sont tous deux en H et que FH est perpendiculaire à M_1M_2.

N. B. - Le problème sera noté sur 20, la question de cours sur 10.

SÉRIE MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

Exercice 1

1er sujet. - Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 ; application à la dérivée de $\sin x$.

2e sujet. - Résoudre par deux méthodes différentes l'équation

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1,75$$

(on calculera les racines avec la précision que permet la règle à calcul).

3e sujet. - Transformation en produits d'une somme ou d'une différence de deux sinus ou de deux cosinus.

Exercice 2

Soient deux axes de coordonnées $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$; un cercle tangent à $x'\text{O}x$ en T se déplace de telle façon que son centre I décrive la droite $y = a$, a est un nombre positif.

1. La deuxième tangente au cercle I, issue de O, rencontre IT en A. On pose $\overline{\text{OT}} = x, \overline{\text{TA}} = y$ et l'on repère I par l'angle $(\text{O}x,\ \text{OI}) = \varphi$.
   Exprimer x et y en fonction de φ ; en déduire une relation entre y et x, que l'on mettra sous la forme $y = f(x)$.
   Variation de la fonction ainsi définie ; tracer la courbe représentative ; lieu du point A, en supposant $a = 1$ cm.
2. Une droite variable, d'équation $y = mx$ (où m est un paramètre), rencontre la courbe précédente en deux points M et N autres que O.
   Trouver l'abscisse, puis l'ordonnée du milieu de MN en fonction de m ; en déduire le lieu de ce point.
   Construire géométriquement les points M et N ; retrouver le lieu du milieu de MN.
3. On se limite maintenant aux valeurs de x supérieures à a.
   La deuxième tangente au cercle I menée du point A rencontre Ox en B. Exprimer le rayon R du cercle circonscrit au triangle AOB en fonction de φ, puis de x.
   Calculer x et φ lorsque $R = 3a$. (On se contentera de la précision de la règle à calcul.)