Le candidat doit traiter obligatoirement les deux exercices et le problème.

Durée : 4 heures

Baccalauréat C Besançon juin 1971

Exercice 1

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre entier $A = n(n^6 - 1)$ est divisible par 7.

Quel est le reste de la division par 7 du nombre :

$$N = 96^{3\,129}$$

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \text{Log}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Donner son ensemble de définition.

Déterminer sa fonction dérivée f'.

En déduire le sens de variation de f, et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

La fonction f admet une fonction réciproque $g = f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$; exprimer pour u réel, $g(u)$ en fonction de u, à l'aide de la fonction exponentielle.

Problème

Le plan orienté ($\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

Étant donné une constante réelle λ, on désigne par T_λ la transformation ponctuelle qui au point M de coordonnées x et y fait correspondre le point M', image de M, de coordonnées x' et y' définies par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& (1+\lambda)x - \lambda y \\ y' &=& \lambda x + (1-\lambda)y \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que T_λ est une bijection du plan sur lui-même et montrer que l'application réciproque $(T_\lambda)^{-1}$ de T_λ est $T_{-\lambda}$. Peut-on choisir λ pour que T_λ soit involutive ?

   b. Quel est l'ensemble des points invariants dans la transformation T_λ, c'est-à-dire des points M confondus avec leur images M' ?

   M étant un point quelconque du plan, et M' son image par T_λ, quelle est la direction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ lorsqu'il n'est pas nul ?

2. **a.** Montrer que l'ensemble des images des points d'une droite (d) est une droite (d').

   b. Déterminer les droites (d) qui sont confondues avec leur transformées (d').

   Montrer que si (d) et (d') ne sont pas confondues, elles se coupent en un point appartenant à la première bissectrice des axes.

3. On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des transformations T_λ obtenues lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

   Déterminer l'application composée $T_{\lambda'} \circ T_\lambda$ des éléments T_λ et $T_{\lambda'}$ de $\mathcal{T}$ pour la loi de composition des applications.

   On trouvera : $T_{\lambda'} \circ T_\lambda = T_{\lambda+\lambda'}$

   Déduire des résultats précédents que la loi de composition des applications confère à $\mathcal{T}$ une structure de groupe commutatif et trouver un isomorphisme entre le groupe additif $\mathbb{R}$ 'ensemble des réels muni de l'addition) et ce groupe.

4. On considère un nouveau repère orthonormé $\mathscr{R}'$: les axes $X'\text{O}X$ et $Y'\text{O}Y$ de ce repère sont déduits de $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ respectivement, par rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$.

Écrire les relations donnant les coordonnées $(x~;~y)$ d'un point M dans le repère $\mathscr{R}$ en fonction de ses coordonnées $(X~;~Y)$ dans le repère $\mathscr{R}'$ et celles donnant les coordonnées $(X~;~Y)$ dans $\mathscr{R}'$ en fonction des coordonnées (x, y) du même point M.

En déduire les relations définissant dans $\mathscr{R}'$ les coordonnées $(X'~;~Y')$ du point M', image dans la transformation T_{λ} du point M, en fonction des coordonnées $(X~;~Y)$ dans le même repère $\mathscr{R}'$.

Étant donné une parabole (p) de sommet O d'axe OX, montrer alors que sa transformée par T_{λ} est une parabole (p'_{λ}) d'axe parallèle à OX, dont on déterminera le sommet S_{λ}.