Baccalauréat C Besançon juin 1973

EXERCICE 1

Soit f la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto \tan x - x.$$

Définir la fonction dérivée de f, en déduire le sens de variation de f et montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Soit F la fonction réciproque de f. Construire, dans un repère orthonormé, les représentation graphiques de f et F.

EXERCICE 2

Soit S l'ensemble de tous les entiers relatifs vérifiant simultanément les deux congruences

$$x \equiv 1 \quad [3] \quad \text{et} \quad x \equiv 2 \quad [5].$$

Trouver un entier relatif plus petit que 10 appartenant à S.

Montrer, en précisant les théorèmes utilisés, que $\forall (a,\ b) \in S \times S,\ a \equiv ab \quad [15]$.

En déduire l'expression générale des éléments de l'ensemble S.

PROBLÈME

Partie A

Soit E le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ et T l'application linéaire de E dans E définie par

$$T\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{e_2} \quad \text{et} \quad T\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}.$$

(λ et μ sont deux réels).

1. Donner la matrice de T dans la base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$. Déterminer les couples $(\lambda,\ \mu)$ de réels pour lesquels T est bijective.
   Trouver tous les couples $(\lambda,\ \mu)$ tels que T soit une isométrie vectorielle de E; préciser alors si T est une rotation ou une symétrie vectorielle par rapport à un droite vectorielle (dont on précisera une base).
2. λ et μ qui interviennent dans la définition de T étant quelconques, on considère la suite

$$\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{e_2},\quad \overrightarrow{e_3} = T\left(\overrightarrow{e_2}\right), \ldots,\quad \overrightarrow{e_n} = T\left(\overrightarrow{e_{n-1}}\right), \ldots$$

   $\overrightarrow{e_n}$ étant le transformé de $\overrightarrow{e_{n-1}}$ par T.
   On pose

$$\overrightarrow{e_n} = x_n\overrightarrow{e_1} + y_n\overrightarrow{e_2}.$$

   Donner $\left(x_1,\ y_1\right)$, ainsi que $\left(x_2,\ y_2\right)$ et montrer que $\forall n \geqslant 2,\ x_n = \lambda y_{n-1}$ et $\forall n > 2,\ y_n = \mu y_{n-1} + \lambda y_{n-2}$.

3. α et β désignent les racines distinctes, réelles ou complexes, de l'équation :

$$x^2 - \mu x - \lambda = 0,$$

avec

$$\mu^2 + 4\lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0.$$

Exprimer k et k', tels que $y_1 = k + k'$ et $y_2 = k\alpha + k'\beta$ en fonction de α et β.
Montrer alors par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$y_n = k\alpha^{n-1} + k'\beta^{n-1}.$$

Vérifier que si α et β sont complexes, k et k' sont complexes conjugués et que $k\alpha^{n-1} + k'\beta^{n-1}$ est réel pour tout entier naturel non nul.
Calculer alors y_n et x_n en fonction de α, β, n (n entier naturel non nul), puis établir que $x_n + \alpha y_n = \alpha^{n-1}$.

Partie B

E est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$. M_n désigne le point unique de E tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n} = \overrightarrow{e_n}$.

1. **a.** On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que les points $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ sont tous situés sur une droite dont on donnera l'équation.

   b. On suppose que $\alpha = -1$. Montrer que les points $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ sont tous situés sur la réunion de deux droites dont on donnera les équations.

2. On prend maintenant $\lambda = -1$ et $\mu = 2\cos\dfrac{2\pi}{p}$, p entier naturel supérieur à 2.

   Calculer α et β, ainsi que x_n et y_n. Montrer que la suite de points $n \longmapsto M_n$ est périodique et que p est l'une de ses périodes