Baccalauréat Besançon septembre 1966
série mathématiques et mathématiques et technique

I.

Soit le nombre complexe z de module 1 et d'argument θ (mod. 2π).
Calculer le module du produit $(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$.

II.

On considère la fonction

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^3-3x+1}{x^2-x}.$$

1. Étudier ses variations et construire son graphe, (C), relativement au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Soit ω le point d'intersection de (C) et de son asymptote oblique.
   Montrer que ω est centre de symétrie de (C).

III.

Relativement à un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$, on considère les points fixes F, de coordonnées $x=d$, $y=0$ $(d>0)$, et I, milieu de OF.

1. Soit (T_1) la transformation ponctuelle

   $$\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}' = T_1(\mathrm{M}),$$

   qui fait correspondre au point M du plan le point M′ intersection des droites MF et de Iφ, φ étant la projection de M sur Oy, lorsque ces droites sont définies et sécantes.
   Quel est l'ensemble, E, des points du plan pour lesquels la transformation n'est pas définie ?
   Quel est le transformé d'un point quelconque de la droite Oy autre que O ?
   Montrer géométriquement que la transformation (T_1) est involutive.
2. Quelle est la disposition des points M, M′ et F lorsque MM′ est parallèle à Oy ?
   Lorsque MM′ n'est pas parallèle à Oy, soit L le point d'intersection de la droite Oy et de la droite MM′ ; préciser la disposition des quatre points M, M′, F et L.
   Exprimer les coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ de M′ en fonction des coordonnées $(x\,;\ y)$ de M.
3. On considère maintenant la transformation (T) qui au point M$(x\,;\ y)$ fait correspondre le point M′ $\left(x'\,;\ y'\right)$ tel que

   $$x' = \frac{dx}{2x-d},\quad y' = -\frac{dy}{2x-d}.$$

   En quels points du plan cette transformation n'est-elle pas définie ?
   Vérifier analytiquement qu'elle est involutive.
   Comparer T et T_1
4. On considère les courbes :
   (Γ_1), d'équation $y^2-2dx+d^2=0$,
   (Γ_2), d'équation ; $\dfrac{x^2}{2}+y^2-2dx+d^2=0$,
   (Γ_3), d'équation $y^2-x^2-2dx+d^2=0$.
   a. Trouver analytiquement leurs transformées respectives par (T).

b. Construire rapidement ces courbes. Montrer qu'elles ont une définition géométrique commune et interpréter géométriquement le résultat obtenu au paragraphe a.

5. On suppose enfin que M décrit le cercle (Ω) de centre O et de rayon OI.
Trouver analytiquement la figure transformée, $\left(\Omega'\right)$, de (Ω) par la transformation (T).
Donner une solution géométrique de cette question.