

∞ Baccalauréat Besançon septembre 1966 ∞
série mathématiques et mathématiques et technique

I.

Soit le nombre complexe z de module 1 et d'argument $\theta \pmod{2\pi}$.
Calculer le module du produit $(z - i)(z + i)$.

II.

On considère la fonction

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - x}.$$

1. Étudier ses variations et construire son graphe, (C) , relativement au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit ω le point d'intersection de (C) et de son asymptote oblique.
Montrer que ω est centre de symétrie de (C) .

III.

Relativement à un repère orthonormé xOy , on considère les points fixes F , de coordonnées $x = d, y = 0$ ($d > 0$), et I , milieu de OF .

1. Soit (T_1) la transformation ponctuelle

$$M \mapsto M' = T_1(M),$$

qui fait correspondre au point M du plan le point M' intersection des droites MF et de $I\varphi$, φ étant la projection de M sur Oy , lorsque ces droites sont définies et sécantes.
Quel est l'ensemble, E , des points du plan pour lesquels la transformation n'est pas définie?

Quel est le transformé d'un point quelconque de la droite Oy autre que O ?

Montrer géométriquement que la transformation (T_1) est involutive.

2. Quelle est la disposition des points M, M' et F lorsque MM' est parallèle à Oy ?
Lorsque MM' n'est pas parallèle à Oy , soit L le point d'intersection de la droite Oy et de la droite MM' ; préciser la disposition des quatre points M, M', F et L .
Exprimer les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M .
3. On considère maintenant la transformation (T) qui au point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel que

$$x' = \frac{dx}{2x - d}, \quad y' = -\frac{dy}{2x - d}.$$

En quels points du plan cette transformation n'est-elle pas définie?

Vérifier analytiquement qu'elle est involutive.

Comparer T et T_1

4. On considère les courbes :

(Γ_1) , d'équation $y^2 - 2dx + d^2 = 0$,

(Γ_2) , d'équation; $\frac{x^2}{2} + y^2 - 2dx + d^2 = 0$,

(Γ_3) , d'équation $y^2 - x^2 - 2dx + d^2 = 0$.

a. Trouver analytiquement leurs transformées respectives par (T) .

b. Construire rapidement ces courbes. Montrer qu'elles ont une définition géométrique commune et interpréter géométriquement le résultat obtenu au paragraphe a.

5. On suppose enfin que M décrit le cercle (Ω) de centre O et de rayon OI .

Trouver analytiquement la figure transformée, (Ω') , de (Ω) par la transformation (T) .

Donner une solution géométrique de cette question.