Épreuve I

Académie de Bordeaux

Exercice 1. Logique et génétique

Dans ce jeu, les personnages créés sont de forme ronde ou carrée, sont chauves ou pas, ont des yeux noirs, gris ou blancs. Pour les bras, 4 cas sont possibles (pas de bras, uniquement le bras droit, uniquement le bras gauche, ou les 2 bras). Il en est de même pour les jambes.

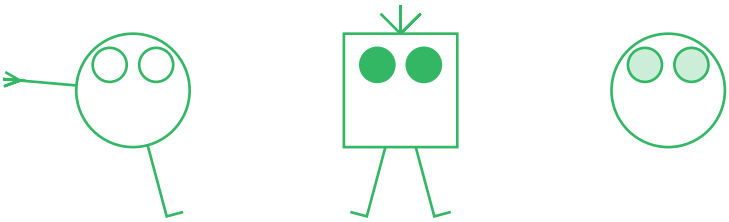


Figure I.1

Sur le schéma de la figure I.1, le premier personnage est rond, chauve, a les yeux blancs, le bras droit et la jambe gauche.
Le 2e personnage est carré, chevelu, a les yeux noirs, n'a pas de bras et a deux jambes. Le 3e personnage est rond, chauve, a les yeux gris et n'a ni bras, ni jambe.

1. Combien peut-on créer de personnages différents dans ce jeu ?
2. Ces personnages sont créés à partir d'un logiciel qui remplit un tableau comprenant 2 colonnes de 5 cases, chaque case contenant soit un 1, soit un

0 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. Ce tableau est appelé la carte génétique du personnage.

a. Combien de cartes génétiques différentes peut-on remplir ?

1	0
0	0
1	1
0	1
1	0
A	

0	1
1	0
0	1
0	0
1	1
B	

Figure I.2: *Cartes génétiques*

- La première ligne de 2 cases correspond à la forme, la 2e aux cheveux, la 3e aux yeux, la 4e aux bras et la 5e aux jambes.
- Pour que la forme du corps soit carrée il faut et il suffit que les deux cases de la première ligne contiennent des zéros. Dans les autres cas la forme du corps est ronde. On dit que la forme ronde est dominante.
- Il en est de même à la 2e ligne où le caractère chauve est dominant.
- Pour le caractère des yeux, $(1,1)$ donne des yeux noirs, $(1,0)$ ou $(0,1)$ donne des yeux gris et $(0,0)$ donne des yeux blancs.
- Pour les bras $(1,1)$ donne 2 bras, $(1,0)$ donne le bras gauche, $(0,1)$ donne le bras droit et $(0,0)$ donne aucun bras. Il en est de même pour les jambes.

b. Dessiner les deux personnages A et B correspondant aux cartes I.2.

c. Donner une carte différente de celle de A et donnant cependant un jumeau de A c'est-à-dire un personnage visuellement identique à A.

d. Un personnage étant créé au hasard, quelle est la probabilité que ce soit un jumeau de A ? de B ?

3. Dans ce jeu, pour construire d'autres personnages, on peut connecter un couple (X, Y) de personnages déjà construits. La carte génétique du personnage Z issu de la connexion (X, Y) est obtenue de la manière suivante : la colonne de gauche est obtenue à partir de la carte de X en choisissant, pour chacun des cinq caractères, au hasard (avec la probabilité 1/2) le contenu de l'une des deux cases correspondant à ce caractère. Il en est de même pour la colonne de droite à partir de la carte de Y.

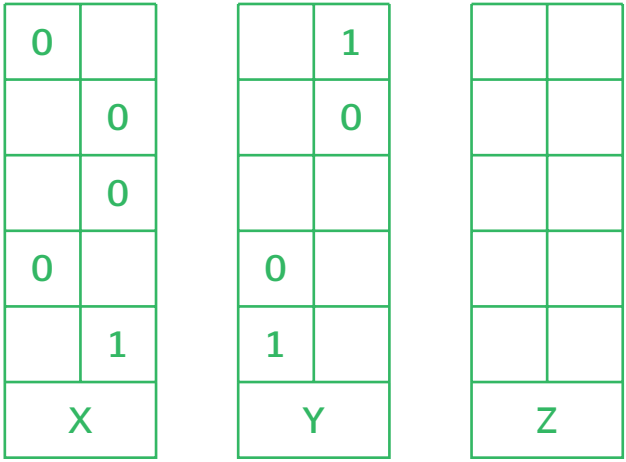


Figure I.3

a. La connexion (X, Y) donne-t-elle toujours le même résultat que la connexion (Y, X) ?

b. X et Y sont ronds, X a des cheveux, Y est chauve,
X a les yeux gris, Y les a noirs et ils ont chacun un bras et une jambe. Le personnage Z issu de la connexion (X, Y) est représenté sur la figure I.4.

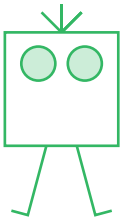


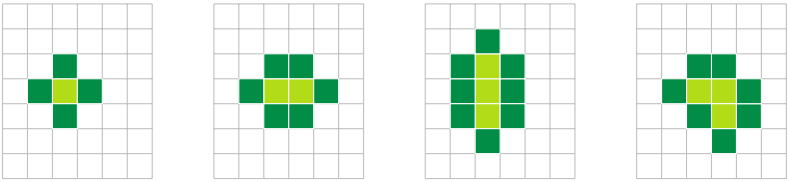
Figure I.4

Reproduire et compléter les cartes génétiques des trois personnages X, Y et Z.

c. Soit P un personnage issu de la connexion de deux personnages de forme ronde créés par le logiciel.
Quelle est la probabilité que le personnage P soit de forme carrée ?

Exercice 2. Les noirs entourent les gris

Sur un quadrillage, un carré gris peut être entouré de 4 carrés noirs (figure I.5a), un bloc de deux carrés gris peut être entouré par 6 carrés noirs (figure I.5b), un bloc de trois carrés gris peut être entouré par 7 ou 8 carrés noirs (figure I.5c et figure I.5d), etc.



(a) (b) (c) (d)

Figure I.5

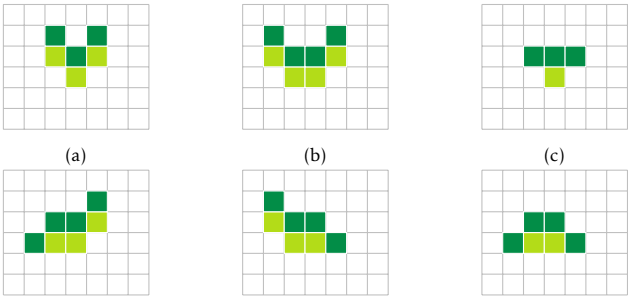
On recherche le nombre maximal de carrés gris entourés par 2019 carrés noirs. Pour tout entier $n \geqslant 4$, on désigne par a_n le nombre maximal de carrés gris entourés par n carrés noirs.

1. **a.** Déterminer a_4, a_5 et a_6. On justifiera chaque réponse.

   b. Combien faut-il au minimum de carrés noirs pour entourer 4 carrés gris ? En déduire que $a_7 = 3$.

2. Soient n et p deux entiers strictement supérieur à 1. On note C une configuration formée de n carrés noirs qui entourent un bloc B de taille p c'est-à-dire formé de p carrés gris.

   On considère les motifs de la figure I.6.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Figure I.6

   a. Justifier que si la configuration C contient l'un des motifs des figures I.6a, I.6b, I.6c, I.6d ou I.6e alors on peut augmenter la taille du bloc B sans modifier le nombre de carrés noirs.

b. Expliquer pourquoi il en est également ainsi si la configuration C contient deux fois le motif de la figure I.6f ? En déduire que si $p = a_n$, la configuration C contient au plus deux séries de deux carrés noirs accolés horizontalement.

c. Justifier que dans la configuration représentée la figure I.7, on peut augmenter le nombre de carrés gris sans modifier le nombre de carrés noirs.

En est-il toujours ainsi pour une configuration C qui contient deux séries de deux carrés noirs accolés horizontalement.

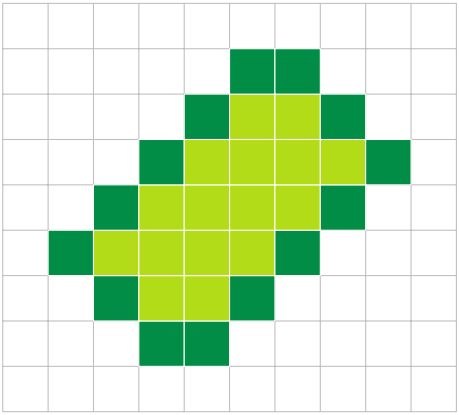


Figure I.7

3. Soient a et b deux entiers strictement positifs. On considère deux types de configurations de n carrés noirs de côté 1 notées $C_1(a,b)$ et $C_2(a,b)$.

- Les n carrés noirs sont placés de façon que leurs centres sont situés sur les côtés d'un rectangle de côtés $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$ comme indiqué sur la figure I.8a.
- Les n carrés noirs sont placés de façon que leurs centres sont situés sur les côtés d'un polygone dont les côtés successifs ont pour mesure 1, $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$, 1 et $(b-1)\sqrt{2}$ si $b > 1$, comme indiqué sur la figure I.8b.

a. Soit p le nombre de carrés gris entourés par les n carrés noirs dans la configuration $C_1(a,b)$.

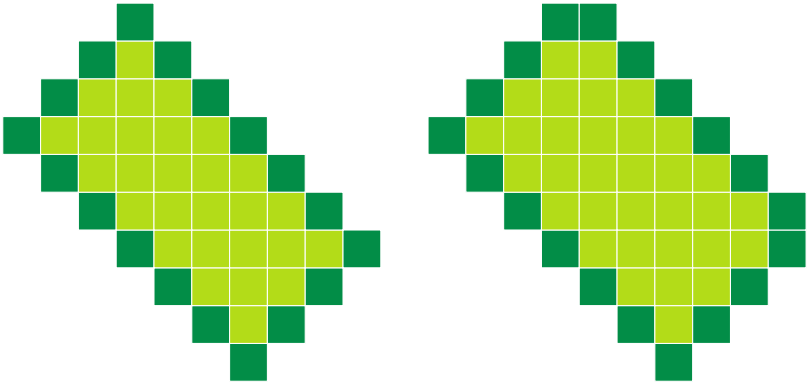
Justifier que $n = 2a + 2b$ et démontrer que $p = ab + (a-1)(b-1)$

b. Soit q le nombre de carrés gris entourés par les n carrés noirs dans la configuration $C_2(a,b)$.

Justifier qu'en supprimant un carré noir, on peut se ramener à la configuration $C_1(a,b)$.

En déduire que $n = 2a + 2b + 1$ et $q = a(n - 2 - 2a)$.

4. On admet que si n est un entier impair alors le nombre maximum a_n de carrés gris est obtenu avec une configuration $C_2(a,b)$ où a et b sont deux entiers strictement positifs.



(a) *Configuration* $C_1(a,b)$ (b) *Configuration* $C_2(a,b)$

FIGURE I.8

Calculer a_{2019}.
(On pourra s'intéresser aux variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 2017x$).

Exercice 3. Les triplets pythagoriciens

Étant donnés trois entiers naturels non nuls tels que $a < b < c$, on dit que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est un triplet pythagoricien si et seulement si $a^2 + b^2 = c^2$.
Rechercher un triplet pythagoricien revient donc à rechercher les dimensions d'un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont des entiers naturels.

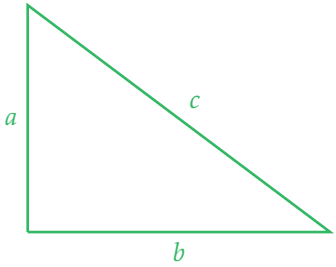


Figure I.9

Partie A

1. En observant les figures I.9 et I.10, et en conjecturant, recopier et compléter le tableau I.1.

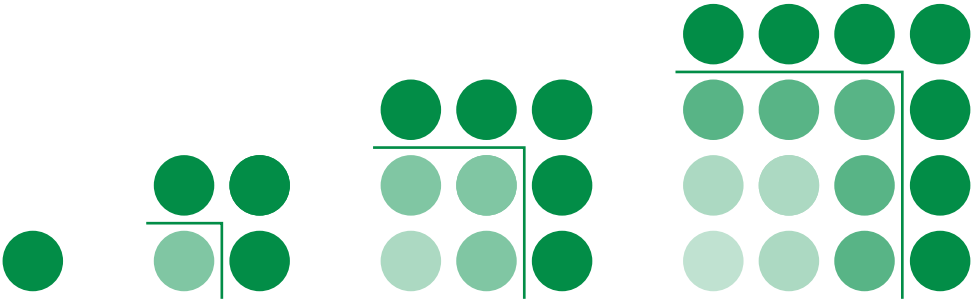


Figure I.10

Nombre de points sur un côté	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de points total	1	4					
Nombre de points rajoutés		3					

Table I.1

Que peut-on remarquer sur la dernière ligne du tableau ?

2. On considère un carré dont le côté est formé de n points où n est un entier naturel non nul.

a. Démontrer que : $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.

b. Donner deux entiers consécutifs dont la différence des carrés est égale à 49.

En déduire un triplet pythagoricien.

c. Donner un triplet pythagoricien dont le premier entier est 35.

3. **a.** Démontrer qu'il existe une infinité de triplets pythagoriciens comportant deux entiers consécutifs.

b. Écrire un algorithme qui affiche un triplet pythagoricien commençant par un entier impair du choix de l'utilisateur.

Partie B

On rappelle qu'un entier naturel n est un carré parfait si et seulement si il existe un entier naturel m tel que $n = m^2$.
Sur la figure I.11, les rectangles hachurés ont pour dimensions x et y où x et y sont deux entiers naturels non nuls tels que $x < y$.

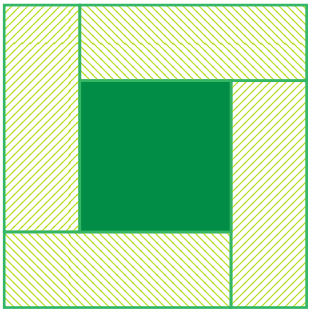


Figure I.11

1. **a.** Exprimer l'aire du carré grisé, l'aire du grand carré et l'aire de la zone hachurée en fonction de x et y .

b. Démontrer que si x et y sont des carrés parfaits alors $4xy$ est aussi un carré parfait.

c. En déduire l'expression d'un triplet pythagoricien en fonction de x et y lorsque x et y sont des carrés parfaits.

2. Fabriquer quatre triplets pythagoriciens à l'aide de cette méthode.