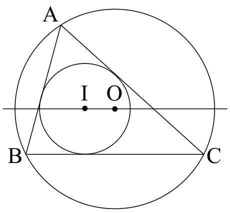
BORDEAUX

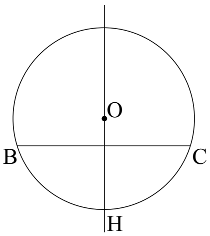
Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

Triangles olympiadiques



On appelle triangle olympiadique de sommet A, un triangle tel que, si O et I désignent respectivement les centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC, alors ces deux points sont distincts et la droite (OI) est parallèle à (BC).



1. (OH) désignant la médiatrice du segment [BC], reproduire la figure ci-contre et construire le point A tel que le triangle ABC soit olympiadique de sommet A.

2. Cette construction est-elle toujours réalisable ? En déduire une condition sur l'angle BAC pour qu'il existe un triangle olympiadique de sommet A.

Eléments de solution (Abderrahim Ouardini)

1. a) **Analyse du problème**.
Supposons que le problème est possible et admet une solution, on a :
$\widehat{CIH} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} + \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$ (angle extérieur au triangle ACI)

et
$$\begin{aligned}\widehat{HCI} &= \widehat{HCB} + \widehat{BCI}\\ &= \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2},\end{aligned}$$

(puisque $\widehat{HCB} = \widehat{HAB} = \widehat{HAC} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$) donc $\widehat{CIH} = \widehat{HCI}$.
Ainsi le triangle HIC est isocèle en H et $HC = HI$.

Remarquons que si le point A est une solution du problème, alors son symétrique par rapport à la droite (OH) l'est aussi. Donc on va se placer dans le demi-plan (Π) limité par la droite (OH) qui ne contient pas le point C.

b) Dans le demi-plan (Π) traçons le cercle de centre H et de rayon HB, son intersection avec la parallèle menée par le point O à la droite (BC) donne le point I ; et enfin la droite (HI) recoupe le cercle (Γ) au point voulu.

c) **Justification**.
Il est clair que la droite (IH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
On a $\widehat{IBA} = \widehat{BIH} - \frac{\widehat{bac}}{2}$ (angle extérieur au triangle ABI), le triangle HIB est isocèle en H, donc $\widehat{BIH} = \widehat{IBH}$, et comme $\frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{CBH}$ (angles interceptant le même arc) alors :

$$\widehat{IBA} = \widehat{BIH} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{IBH} - \widehat{CBH} = \widehat{IBC},$$

(la demi-droite [BC) est à l'extérieure de l'angle $\widehat{IBH}$) et ceci montre que la droite (IB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Donc le point est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

2. La construction décrite à la question 1 n'est possible que lorsque $R\sqrt{2} > BH > R$ où R désigne le rayon du cercle Γ.
Remarquons que l'inégalité $R\sqrt{2} > BH$ est toujours vérifiée puisque le segment [BH] est contenu dans le carré construit sur le côté [OH] dans le demi-plan (Π).
Le théorème Al-Kashi, appliqué au triangle OHB, donne :

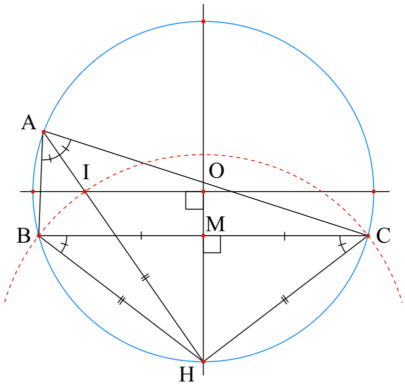
$$\begin{aligned} BH^2 &= OB^2 + OH^2 - 2OB.OH.\cos\widehat{BOH} \\ &= 2R^2 - 2R^2.\cos\widehat{BOH} \end{aligned}$$

On a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} BH > R \quad &\Leftrightarrow \quad 2R^2\left(1 - \cos\widehat{BOH}\right) > R^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \cos\widehat{BOH} > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} > \cos\widehat{BOH}. \end{aligned}$$

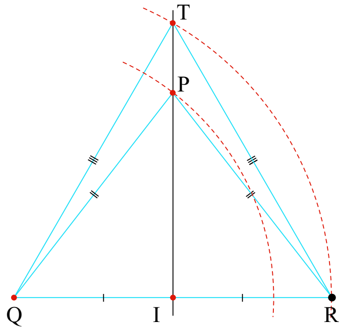
On a alors $\widehat{BOH} > 60^o$, ou encore $\widehat{BAC} > 60^o$
Donc une condition nécessaire et suffisante sur l'angle α pour qu'il existe

un triangle olympiadique ABC de sommet A tel que $\widehat{BAC} = \alpha$ *est* $\alpha > 60^o$.



Remarque. On peut obtenir le résultat de la discussion ($\alpha > 60^o$) en utilisant le résultat suivant :
Soit PQR un triangle isocèle en P, si $QR > PQ$, ***alors*** $\widehat{QPR} > 60^o$.

Preuve
Méthode 1



Plaçons le point T sur la demi-droite [IP) tel que $QT = QR$ (ce qui est possible puisque $QR > PQ$).
On a $\widehat{QPI} = \widehat{PTQ} + \widehat{PQT} = 30^o + \widehat{PQT}$ (angle extérieur au triangle PQT), donc $\widehat{QPI} > 30^o$, et par suite : $\widehat{QPR} = 2 \times \widehat{QPI} > 2 \times 30^o = 60^o$.

Méthode 2
Dans le triangle rectangle PQI, on a $\sin \widehat{QPI} = \dfrac{QI}{QP} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{QR}{QP} > \dfrac{1}{2}$, puisqu'il s'agit d'un angle aigu, on obtient $\widehat{QPI} > 30^o$.

Prolongement(A.O.)

1. **Autre méthode**
   (une condition nécessaire et suffisante sur l'angle α**)**

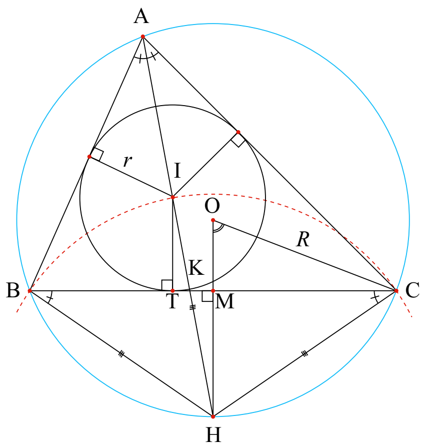
Soit M le milieu du côté [BC], dans le triangle rectangle BOM. On a : $OM = R\ \cos\widehat{BAC}$. Comme le triangle ABC est olympiadique de sommet A, alors $OM = r$. Donc $\dfrac{r}{R} = \cos\widehat{BAC}$.
La relation d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$ nous permet de déduire l'inégalité d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr > 0$ (inégalité stricte puisque les points O et I sont distincts), ou encore $\dfrac{r}{R}\text{‘}\dfrac{1}{2}$, donc $\cos\widehat{BAC} < \dfrac{1}{2}$.

2. **Inégalité dans un triangle**
On désigne respectivement par r, R les mesures du rayon du cercle inscrit, circonscrit dans le triangle ABC et par a la mesure du côté [BC].
On a l'inégalité suivante :

$$\frac{4ar}{4r^2 + a^2} \leqslant \cos\frac{\alpha}{2}$$

l'égalmité a lieu si et seulement si le triangle ABC est isocèle en A.

Preuve de l'inégalité



Partons des deux inégalités $HM \leqslant HK$ et $IT \leqslant IK$, et par somme, on obtient : $r + HM \leqslant IH$, comme $IH = HC$ (question 1.a) alors $r + HM \leqslant HC$.
On désigne par α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Dans le triangle HCM, on a :

$$HM = \frac{a}{2}\tan\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad HC = \frac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

donc :

$$r + \frac{a}{2}\tan\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

ouo encore :

$$r \leqslant \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} - \tan\frac{\alpha}{2}\right).$$

Comme $o < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, alors :

$$\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

on a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} r \leqslant \frac{a}{21}\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \tan\tfrac{\alpha}{2}\right) &\Leftrightarrow \frac{2r}{a}\cos\frac{\alpha}{2} \leqslant 1-\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1 - \frac{2r}{a}\cos\frac{\alpha}{2}, \\ &\Leftrightarrow 1-\cos^2\frac{\alpha}{2} \leqslant \left(1-\frac{2r}{a}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

soit, après réduction, on obtient l'inégalité voulue.

L'égalité a lieu si et seulement si $HM = HK$ et $IT = IK$; ce qui entraîne que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est la médiatrice du côté [BC], ou encore que le triangle ABC est isocèle en A.

3. Appliquons l'inégalité précédente à un triangle olympiadique ABC de sommet A On a : $r = R\cos\alpha$ (propriété caractéristique d'un triangle olympiadique), et $a = 2R\sin\alpha$. Donc, d'après l'inégalité :

$$\frac{4ar}{4r^2+a^2} \leqslant \cos\frac{\alpha}{2},$$

on obtient :

$$\frac{4ar}{4r^2+a^2} = \frac{(4R\cos\alpha)\times(2R\sin\alpha)}{4(R\cos\alpha)+(2R\sin\alpha)^2} \leqslant \cos\frac{\alpha}{2},$$

ou encore $\sin 2\alpha \leqslant \cos\frac{\alpha}{2}$.

Pour un triangla ABC olympiadique de sommet A, on a :

a) L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.
En effet, comme la droite (OI) est parallèle à (BC), et que les points A et I sont situés du même côté de (BC), alors ils en est de même pour les points A et O. Donc L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

b) L'angle $\widehat{BAC}$ ne peut pas être droit.
En effet, dans le cas contraire, désignons respectivement par N, M et H les projections orthogonales du point I sur les côtés [AB] [AC] et [BC]. Il est clair que $IN = MA = IM = MC$, donc le triangle IMC serait rectangle isocèle en M, ce qui entraîne $\widehat{ICM} = \widehat{ICH} = \frac{\pi}{4}$, ce qui est absurde.

Résolution da,s l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'inéquation $\sin 2\alpha \leqslant \cos \dfrac{\alpha}{2}$.
L'inéquation proposée est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha \leqslant \cos\frac{\alpha}{2} &\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \geqslant 0,\\
&\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \geqslant 0,\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{4}\right) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

On va envisager deux cas :

Premier cas :

$$\left\{\begin{array}{l}
\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\alpha}{4}\right) \geqslant 0,\\[2ex]
\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5\alpha}{4}\right) \geqslant 0.
\end{array}\right.$$

Dans ce cas, il existe deux entiers relatifs m et n tels que :

$$\left\{\begin{array}{l}
2m\pi \leqslant \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\alpha}{4} \leqslant (2m+1)\pi,\\[2ex]
2n\pi \leqslant \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5\alpha}{4} \leqslant (2n+1)\pi.
\end{array}\right.$$

Après résolution, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{(8m+3)\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{(1-8m)\pi}{3},\\[2ex]
-\dfrac{(8n+3)\pi}{5} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{(1-8n)\pi}{5}.
\end{array}\right.$$

Ce qui donne nécessairement $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{5}\right]$.

Deuxième cas :

$$\left\{\begin{array}{l}
\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\alpha}{4}\right) \leqslant 0,\\[2ex]
\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5\alpha}{4}\right) \leqslant 0.
\end{array}\right.$$

Dans ce cas, il existe deux entiers relatifs m et n tels que :

$$\begin{cases} (2m+1)\pi \leqslant \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\alpha}{4} \leqslant (2m+2)\pi, \\ \\ (2n+1)\pi \leqslant \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{5\alpha}{4} \leqslant (2n+2)\pi. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} -\dfrac{(8m+7)\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant -\dfrac{(8m+3)\pi}{3}, \\ \\ -\dfrac{(8n+7)\pi}{5} \leqslant \alpha \leqslant -\dfrac{(8n+3)\pi}{5}. \end{cases}$$

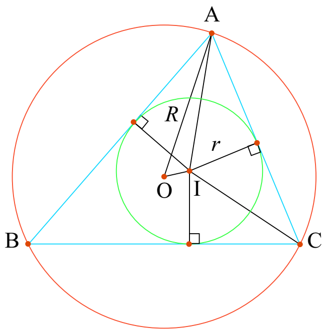
Ce qui donne $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

4. **Inégalité d'Euler révisée.**
On désigne respectivement par r, R les mesures des rayons dui cercle inscrit et circonscrit dans un triangle ABC. On a la double inégalité :

$$\frac{r}{2R} \leqslant \min\left(\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right),\ \sin\frac{\beta}{2}\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right),\ \sin\frac{\gamma}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{4}$$

avec $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$, $\gamma = \widehat{ACB}$.

Preuve :



Par application du théorème d'Al-Kashi dans le triangle AOI, on a :

$$OI^2 = OA^2 + IA^2 - 2.OA.IA\cos\widehat{OAI},$$

(la relation d'Al-Kashi reste valable même sil es points O, A, I sont alignés ou O = I)

comme $OA = R$ et $IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, alors $OI^2 = R^2 + \left(\dfrac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2 - 2R\dfrac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cos\widehat{OAI}$, et par application de la relation d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$, on obtient :

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R^2 + \left(\frac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2 - 2R\frac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cos\widehat{OAI},$$

soit

$$\left(\frac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2 + 2Rr = 2R\frac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cos\widehat{OAI},$$

et, après réduction, on obtient (puisque $\cos\widehat{OAI} \leqslant 1$) :

$$\frac{r}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} + 2R = \frac{2R}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cos\widehat{OAI} \leqslant \frac{2R}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

la conclusion est immédiate.

On sait que pour tout réel t, on a $t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$, en effet :

$$\frac{1}{4} - t(1-t) = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \geqslant 0.$$

D'après le résultat précédent, on a par exemple $\dfrac{r}{2R} \leqslant \sin\dfrac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$, donc

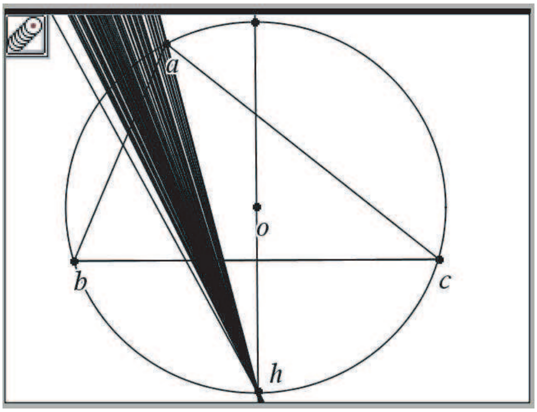
$$\frac{r}{2R} \leqslant \left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \frac{1}{4},$$

ce qui entraîne que $\dfrac{r}{R} \leqslant \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, et ceci achève notre preuve.

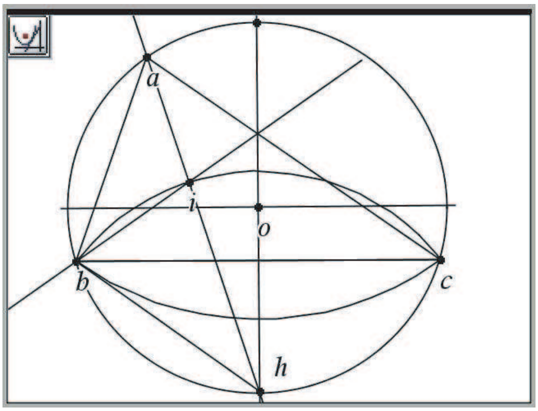
Avec une calculatrice par A. Guillemot

Approche calculatrice avec le module géométrie de NT-Spire.

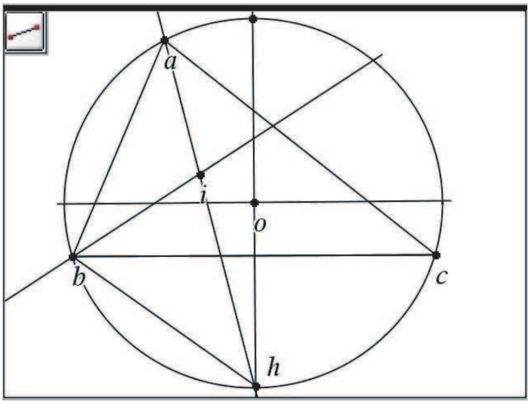
A partir de la figure proposée, plaçons lepoint A sur le cercle et traçons la bissectrice de $\widehat{BAC}$



Si on déplace le point A sur le cercle, il semble que la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ passe par H.
A l'aide d'une deuxième bissectrice, plaçons le point I et traçons la parallèle à (BC) passant par O.



Si l'on demande le lieu de I, il semble être constitué de deux arcs de cercle de centre H et du point diamétralement opposé passant par B.
Démonstration des conjectures précédentes :



Comme (OH) est la médiatrice de [BC], donc H partage l'arc $\widehat{BC}$ en deux arcs de même mesure, donc les angles inscrits qui interceptent ces arcs sont égaux, donc (AH) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$

Soit $\widehat{BAH} = x$ et $\widehat{ABI} = y$, on a donc $\widehat{BIH} = x + y$.
$\widehat{HBC} = \widehat{HAC}$ car ce sont des angles inscrits qui interceptent le même arc.
$\widehat{HBI} = \widehat{HBC} + \widehat{CBI} = x + y$.

Il en résulte que BHI est isocèle de sommet H quand A est sur l'arc de cercle $\widehat{BC}$ du côté de O.

Algorithme de construction de A pour avoir un triangle olympiadique.

1. On trace le cercle Γ de centre H passant par B.
2. On trace la parallèle Δ à (BC) passant par O.
3. On appelle I un des deux points d'intersection de Δ et de Γ.
4. La droite (HI) recoupe le cercle donné en A.

Le triangle ABC est olympiadique.
Comme le point I et toujours à l'intérieur du triangle ABC, il faut que O le soit aussi pour que (IO) soit parallèle à (BC) ce qui impose que $\widehat{BAC} < 90^o$ La construction n'est possible que si Δ et Γ se coupent et à l'intérieur du triangle ABC. C'est à dire que si $BH > OH$.
$BH > OH$ se traduit par $\widehat{BOH} > 60^o$. Comme $\widehat{BOH} = \widehat{BAC}$, la construction n'est possible que si $60^o < \widehat{BAC} < 90^o$.

Exercice n^o 2 (Séries autres que S)

Enoncé

Des carrés dans un carré

ABCD est un carré de côté 1, x est un nombre réel compris entre 0 et 1.