∽ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1978 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On rappelle que les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même sont appelées endomorphismes.

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel réel, $\text{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}\right)$ une base de $\mathscr{E}$, et φ un endomorphisme de $\mathscr{E}$ dont la matrice dans la base B est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. E désigne l'endomorphisme identité de $\mathscr{E}$, θ désigne l'endomorphisme nul de $\mathscr{E}$.

$\varphi^2 - 2\varphi + 2\text{E} = \theta$ si et seulement si

1. Montrer que φ vérifie la relation

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2-2a+2+bc & = & 0 \quad \text{et} \\ a+d & = & 2 \end{array}\right.$$

2. Soit P un plan affine associé au plan vectoriel $\mathscr{E}$ et I un point de P. On considère une application affine f de P dont l'endomorphisme associé φ vérifie la relation $\varphi^2 - 2\varphi + 2\text{E} = \theta$, et laissant le point I invariant.

Soit M un point de P. On note $M' = f(M)$ et $M'' = f\left(M'\right)$.

a. Exprimer $\overrightarrow{\text{I}M''}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{I}M}$ et $\overrightarrow{\text{I}M'}$.

b. Montrer que si M est distinct de I, les vecteurs $\overrightarrow{\text{I}M}$ et $\overrightarrow{\text{I}M'}$ sont linéairement indépendants. (On pourra supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{I}M'} = \lambda \overrightarrow{\text{I}M}$ et en déduire une contradiction).

3. Soit M un point de P distinct de I.

Soit N le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ dans le repère $\text{R} = \left(\text{I}, \overrightarrow{\text{I}M}, \overrightarrow{\text{I}M'}\right)$. Déterminer en fonction de $(\alpha\ ;\ \beta)$ les coordonnées $(\alpha'\ ;\ \beta')$ de N' dans le repère R.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Un nombre naturel N dont le nombre des dizaines est noté D et dont le chiffre des unités est noté u, s'écrit :

$$N = 10D + u.$$

On considère le nombre $N' = D + 2u$.

1. Démontrer l'équivalence entre les deux propriétés :

- N est divisible par 19
- N' est divisible par 19.

En utilisant plusieurs fois de suite cette équivalence étudier si le nombre 29 431 est divisible par 19.

2. Dans cette question on ne considère que des naturels N non divisibles par 19.

Les nombres N et N' peuvent-ils être congrus, modulo 19 ?

On note r et r' les restes respectifs des divisions de N et N' par 19, déterminer une relation entre r et r'.

PROBLÈME **12 POINTS**

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions numériques, définies et continues sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel réel.

1. Soit Y la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$Y(t) = 1 \text{ si } t > 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(t) = -1 \text{ si } t < 0.$$

Montrer, que l'intégrale $H(x) = \displaystyle\int_0^x tY(t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction numérique ainsi définie est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Déterminer $H'(x)$ et étudier les limites :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{H'(x) - H'(0)}{x}, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{H'(x) - H'(0)}{x}$$

2. Désignant par f un élément quelconque de $\mathscr{F}$ on considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$; calculer $g(0)$, $g'(0)$ et montrer que g admet une dérivée seconde $g''(0)$ au point $x_0 = 0$. Déterminer $g''(0)$.

3. Montrer que g est élément de $\mathscr{F}$ et que l'application φ de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{F}$ qui à f fait correspondre g est une application linéaire. Est-elle surjective ?

Est-elle injective ?

4. Pour n entier strictement positif soit $g_n = \varphi\left(f_n\right)$ pour $f_n \in \mathscr{F}$ définie par

$$f_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^x.$$

Établir une relation de récurrence entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x)$.

En déduire une expression de $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ puis de $g_n(x)$.

(L'expression de $g_n(x)$ $(n \geqslant 2)$ ne sera pas utilisée dans la suite du problème).

5. Étudier la fonction g_1. Tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C}_1)$ dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé.

6. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan, ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan P dont les coordonnées vérifient $\lambda \leqslant x \leqslant 1$ et $g_1(x) \leqslant y \leqslant 1$.

Étudier la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

7. Étudier la fonction g correspondant à la fonction $f \in \mathscr{F}$ telle que $f(x) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan P admet un centre de symétrie et étudier l'ensemble des points de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Tracer la partie de $(\mathscr{C})$ correspondant à $x \in [-4\pi\,;\,4\pi]$.