Durée : 4 heures

Baccalauréat C Bordeaux juin 1970

EXERCICE 1

N désignant un entier naturel non nul, on considère les entiers de la forme $N^4 + 4$.

1. Décomposer, dans le corps des réels, le polynôme $x^4 + 4$ en produit de deux facteurs du second degré.

   En déduire que 5 est le seul nombre premier de la forme $N^4 + 4$.
2. Montrer que, si N n'est pas un multiple de 5, $N^4 + 4$ est un multiple de 5.

EXERCICE 2

On considère quatre points distincts A, B, C et D alignés sur une droite (Δ) et un point M extérieur à (Δ) tel que

$$(\mathrm{MA}, \mathrm{MB}) = (\mathrm{MC}, \mathrm{MD}) \quad (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Montrer que les cercles MAB et MCD se correspondent dans une translation de vecteur parallèle à (Δ) ou dans une homothétie dont le centre est situé sur (Δ).

EXERCICE 3

Partie I

On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'' + 4y = 3\sin x,$$

où y est la fonction inconnue.

On pose $y = u + \alpha \sin x$, où u est une nouvelle fonction inconnue et α une constante réelle.

1. Pour quelle valeur de α la fonction u vérifie-t-elle l'équation différentielle

   $$(2) \qquad u'' + 4u = 0,$$

   lorsque y vérifie (1) ?
2. Quelle est la solution générale de (2) ? En déduire toutes les solutions de (1).
3. Montrer qu'il n'existe qu'une seule solution de (1) vérifiant les conditions

   $$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad y'(\pi) = 0.$$

   Déterminer cette solution.

Partie II

Dans un repère orthonormé, les droites (D) et (D$'$) admettent les représentations paramétriques suivantes :

(D) $\quad x = 1 + \lambda,\ y = 1 - \lambda,\ z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R};$

(D$'$) $\quad x = 2\mu,\ y = 1,\ z = -2\mu, \mu \in \mathbb{R}.$

Déterminer A $\in$ (D) et B $\in$ (D$'$) tels que la distance AB soit minimale.

Partie III

On suppose qu'il existe une fonction continue unique f définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{l}\forall x \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\\ f(x+y)+x+y \quad = \quad [f(x)+x][f(y)+y]\end{array}\right.$$

et

(2) $f(1) = \mathrm{e} - 1$ (e : base des logarithmes népériens).

1. En posant $x = y = \dfrac{t}{2}$, vérifier que

$$(3) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)+t \geqslant 0$$

et montrer que, s'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0)+x_0 = 0$, alors

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)+x = 0.$$

En déduire, par la considération de (2), que $f(x)+x$ n'est jamais nul et établir que $f(0) = 1$.

2. Montrer que

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\\ f(nx) = [f(x)+x]^n - nx.\end{array}\right.$$

Posant $y = -x$ dans (1), calculer $f(-x)-x$ et établir que (5) reste vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3. Calculer, en fonction du nombre e et de l'entier q, l'expression

$$f\left(\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q}$$

Montrer, en utilisant (5), que l'on a

$$(6) \quad \left\{\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{Q}\ (\mathbb{Q} : \text{ensemble des rationnels}),\\ f(x) = \mathrm{e}^x - x.\end{array}\right.$$

4. On admet, dans la suite, que la fonction f ainsi déterminée sur les rationnels est encore définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x,\ \forall x \in \mathbb{R}\text{[on vérifiera que (1) a lieu].}$$

a. Trouver, lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, les limites de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1$. x En déduire, dans les mêmes conditions, les limites de $f(x)$.

Étudier et représenter graphiquement les variations de f, en soignant particulièrement l'étude des branches infinies.

Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative au point $x = 1$?

b. Évaluer l'aire, $\mathcal{A}(X)$, de la portion de plan comprise entre la courbe, son asymptote et les droites d'équations $x = 0$ et $x = X (X < 0)$. Que peut-on dire de $\mathcal{A}(X)$ lorsque X tend vers $-\infty$?

5. **a.** Montrer que l'on a

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l}\forall X \in \mathbb{R},\\ 1+x \leqslant \mathrm{e}^x.\end{array}\right.$$

b. On pose

$$P_n(a) = (1+a)\left(1+a^2\right)\dots\left(1+a^n\right),$$

pour $a > 0$.

Vérifier que $P_n(a)$ est une fonction croissante de n satisfaisant

$$(8) \quad 0 < P_n(a) < \mathrm{e}^{\frac{1-a^n}{1-a}} \quad (n \geqslant 0).$$

Montrer enfin que, pour $0 < a < 1$, il existe des nombres M dépendant de a vérifiant

$$(9) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(a) < M.$$

Préciser, en fonction de a, une valeur possible de M.

N. B. - Les questions 4. et 5. sont indépendantes des questions précédentes.