Baccalauréat C Bordeaux juin 1973

EXERCICE 1

Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (intégrer par parties).

EXERCICE 2

Deux personnes, A et B, écrivent chacune, au hasard, un nombre entier de deux chiffres (en numération décimale).
Soit x le nombre écrit par A, y le nombre écrit par B. Tous les couples d'entiers $(m\ ;\ n)$ $(10 \leqslant m \leqslant 99,\ 10 \leqslant n \leqslant 99)$ sont supposés équiprobables.
En d'autres termes, on considère l'espace probabilisé $(\Omega,\ \Omega,\ p)$, où Ω est l'ensemble des couples d'entiers $(m\ ;\ n)$ tels que $10 \leqslant m \leqslant 99$, $10 \leqslant n \leqslant 99$, et p est la probabilité pour laquelle toutes les parties à un élément ont la même probabilité.

1. Quelle est la probabilité pour que A et B écrivent le même nombre ? En d'autres termes, calculer la probabilité de l'ensemble Δ des couples $(m\ ;\ n) \in \Omega$ tels que $m = n$.
2. Soit E l'ensemble des couples $(m\ ;\ n) \in \Omega$ tels que $10 \leqslant m < 50$ et $10 \leqslant n < 50$. Calculer $p(\mathrm{E})$.
3. Soit F l'ensemble des couples $(m\ ;\ n) \in \Omega$ tels que $10 \leqslant m < 50$ ou $10 \leqslant n < 50$. Calculer $p(\mathrm{F})$.
4. Soit G l'ensemble des couples $(m\ ;\ n) \in \Omega$ tels que $m < n$. Soit G$'$ l'ensemble des couples $(m\ ;\ n) \in \Omega$, tels que $m > n$. Calculer $p(\mathrm{G})$ et $p(\mathrm{G}')$.

PROBLÈME

Soient E le plan vectoriel, et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base de E. On désigne par $\mathscr{E}$ le plan affine associé à E, et on considère un repère $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ de E.
On appellera φ l'endomorphisme de E dont la matrice, relativement à $\mathscr{B}$, est :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, dont l'application linéaire associée est φ, et qui, au point O, de coordonnées $(0\,;\,0)$ par rapport à $\mathscr{R}$, associe le point A, de coordonnées $(3\,;\,4)$, par rapport à $\mathscr{R}$.
Si M est un point de $\mathscr{E}$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on notera $M_1 = f(M)$, $M_2 = f(M_1)$, et $M_3 = f(M_2)$, et on désignera par $\left(x_1\ ;\ y_1\right)$, $\left(x_2\ ;\ y_2\right)$, $\left(x_3\ ;\ y_3\right)$ respectivement, les coordonnées des points M_1, M_2, M_3.

1. Montrer que f est bijective, et que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 4x-3y+3 \\ y_1 & = & 7x-5y+4 \end{array}\right.$$

2. Montrer que l'image de toute droite vectorielle Δ de E, par l'application linéaire φ, est une droite vectorielle Δ' de E. Si Δ a pour équation dans la base $\mathscr{B}$: $ux + vy = 0$ $((u\ ;\ v) \neq (0\ ;\ 0))$, quelle est l'équation de Δ' ? (Désigner par $\left(x'\ ;\ y'\right)$ les coordonnées, dans $\mathscr{B}$, de l'image par φ du vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $\mathscr{B}$).

   Peut-on avoir $\Delta = \Delta'$? En déduire que si D est une droite affine du plan, $D_1 = f(D)$ est une droite affine, non parallèle à D.

3. Calculer les coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ du barycentre G des points M, M_1, M_2 affectés du même coefficient 1. Vérifier que G est indépendant de M, et montrer que G est invariant par f.
En déduire que f^3 est l'identité sur E. $\left(f^3 = f \circ f \circ f\right)$.

4. **a.** Montrer que pour tout $M \in \mathcal{E}$, distinct de G, les points M, M_1, M_2 ne sont pas alignés.

b. Soit P un point de $\mathcal{E}$, distinct de G. On pose $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{\mathrm{PP_1}}$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{\mathrm{PP_2}}$ (où $\mathrm{P_1} = f(\mathrm{P})$ et $\mathrm{P_2} = f(\mathrm{P_1})$).
Montrer que $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ est une base de E. Quelle est la matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$?
Soient $(a\ ;\ b)$ et $(a_1\ ;\ b_1)$ respectivement les coordonnées de M et de M_1 dans le repère $\left(\mathrm{P}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ de $\mathcal{E}$. Calculer $(a_1\ ;\ b_1)$ en fonction de $(a\ ;\ b)$.