Baccalauréat C Bordeaux groupe 2 [1] juin 1980

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Calculer, pour tout entier $n > 0$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, soit α un nombre réel, et soit p l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$p(n) = n^2\alpha I_n,$$

pour tout $n \in \Omega$.
Déterminer α pour qu'il existe une probabilité P sur $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega))$, telle que, pour tout $n \in \Omega$, on ait $\mathrm{P}(\{n\}) = p(n)$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

À tout nombre réel a, on associe la fonction numérique f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax.$$

Soit $\mathcal{C}_a$ la représentation graphique de cette fonction dans un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de f_a. Quel est l'ensemble A des valeurs de a pour lesquelles les f a présentent un extremum ?

2. Pour tout élément $a \in \mathrm{A}$, on désigne par I_a le point de $\mathcal{C}_a$ correspondant à l'extremum. Déterminer en fonction de a les coordonnées de I_a.

3. Démontrer que l'ensemble E des points I_a lorsque a décrit A, est la représentation graphique d'une fonction g que l'on déterminera.
Étudier les variations de g et construire E.

PROBLÈME **11 POINTS**

Soit E un plan vectoriel et soit $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ une base de E.
Pour tout couple $(a,\ b)$ de nombres réels, soit $F_{a,b}$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est $\begin{pmatrix} a & 2(a-1)\\ b & 1+2b\end{pmatrix}$.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des endomorphismes $F_{a,\ b}$, lorsque $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.
Dans tout le problème, on désignera par $\vec{V}$ le vecteur

$$\vec{V} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}.$$

1. **a.** Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier le couple $(a,\ b)$ pour que $F_{a,\ b}$ soit une application bijective ?

b. Montrer que pour tout $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$, on a $F_{a,\ b}\left(\vec{V}\right) = \vec{V}$.
Quel est l'ensemble E_1 des éléments de E invariants par $F_{a,\ b}$?
Étudier en particulier le cas $a = 1$, $b = 0$.

1. Bordeaux, Limoges

c. Fixons a et b, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour qu'il existe $\overrightarrow{W} \in$ E, $\overrightarrow{W} \neq \overrightarrow{0}$, tel que $F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{W}\right) = \lambda\overrightarrow{W}$, il faut et il suffit que $\lambda = 1$, ou que $\lambda = a + 2b$.

Quel est l'ensemble E_{a+2b} des éléments $\overrightarrow{W} \in$ E tels que

$$F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{W}\right) = (a+2b)\overrightarrow{W}\,?$$

Montrer que si $a \neq 1$ ou $b \neq 0$, E_1 et E_{a+2b} sont des droites vectorielles, et que si $a + 2b \neq 1$, on a $\text{E} = \text{E}_1 \oplus \text{E}_{a+2b}$.

d. Montrer que $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{V}\right)$ est une base de E, et écrire la matrice de $F_{a,\,b}$ dans cette base.

2. Dans cette question, ainsi que dans la question 3, nous désignerons par $\mathscr{E}$ un plan affine associé à E. Soit O un point de $\mathscr{E}$. On désigne par f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, d'endomorphisme associé $F_{-3,\,2}$, et telle que $f(\text{O})$ soit le point O_1, de coordonnées $(-b1\,;\,1)$ dans le repère $\left(\text{O},\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

a. Montrer que f est une application bijective.

b. Soit M un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère $\left(\text{O},\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ et soit $\left(x_1\,;\,y_1\right)$ les coordonnées dans ce repère de $M_1 = f(M)$.

Exprimer x_1 et y_1 en fonction de x et y. Existe-t-il un point M invariant par f ?

c. Existe-t-il des droites affines parallèles à leur image par f ?

Existe-t-il un point M de $\mathscr{E}$, tel que le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{V}$?

Montrer qu'il n'existe pas de droite globalement invariante par f.

3. On désigne par φ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, d'endomorphisme associé $F_{-3,\,2}$, et qui laisse le point O invariant.

Soit M un point de $\mathscr{E}$, et soit $M' = \varphi(M)$. Exprimer les coordonnées $\left(X'\,;\,Y'\right)$ de M', dans le repère $\left(\text{O},\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{V}\right)$, en fonction des coordonnées de M dans ce repère.

Soit D une droite affine dirigée par $\overrightarrow{V}$, et soit m l'intersection de cette droite avec la droite L passant par O, et dirigée par $\overrightarrow{\imath}$.

Montrer que pour tout $M \in$ D, le transformé $M' = \varphi(M)$ appartient à D, et que $\overline{MM'} = 2\overline{\text{O}m}$ (les droites D et L étant munies des vecteurs unités $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\imath}$ respectivement).

Quels sont les points invariants, et les droites globalement invariantes par φ ?

4. On considère les endomorphismes G de E, satisfaisant aux conditions :

- (C_1) $G\left(\overrightarrow{V}\right) = \overrightarrow{V}$ $\qquad (C_1)$
- (C_2) il existe un nombre réel γ tel que $\text{Im}\left(\text{G} - \gamma\text{id}_E\right) \subset \Delta$

où Δ est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{V}$, (la notation id_E dé"signant l'application identité dans E).

a. Montrer que pour un endomorphisme H satisfaisant à (C_2), le réel γ, tel que $\text{Im}(\text{H} - \text{id}_E) \subset \Delta$, est unique.

b. Soient a et b des nombres réels. Quelle est la matrice représentant $F_{a,\,b} - (a+2b)\text{id}_E$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{V}\right)$ de E ? (Utiliser 1. d. En déduire que $F_{a,\,b}$ satisfait aux conditions (C_1) et (C_2).

c. Réciproquement, soit G un endomorphisme de E satisfaisant à $C1$ et $C2$. Il existe donc $\delta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{G}\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \gamma\overrightarrow{\imath} + \delta\overrightarrow{\text{V}}.$$

Exprimer, en fonction de γ et δ, la matrice de G dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{V}\right)$ de E. Comparant à 1. d., en déduire qu'il existe des nombres réels a et b, tels que G = $F_{a,\ b}$.

Déterminer a et b en fonction de γ et δ.

d. Démontrer à l'aide des conditions C_1 et C_2 que le composé de deux endomorphismes de $\mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{F}$, et que l'ensemble $\mathscr{F}'$ des endomorphismes de la forme $F_{a,b}$, où $a+2b \neq 0$, est un sous-groupe du groupe linéaire de E.