Baccalauréat C Bordeaux septembre 1970

EXERCICE 1

1. Étudier les variations de la fonction f définie, dans $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

2. Construire dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les axes étant $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$, la courbe d'équation $y = f(x)$.
3. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe précédente et les droites d'équations respectives $y = x$, $x = \text{e}$ et $x = 1$.

EXERCICE 2

Montrer que, pour $n \geqslant 1$, le nombre

$$A = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$$

est divisible par 17.
(On pourra, soit raisonner par récurrence, soit utiliser les congruences modulo 17.)

PROBLÈME

Dans le plan complexe (P), muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on appelle T la transformation ponctuelle qui à un point m d'affixe z fait correspondre le point M d'affixe Z telle que

$$Z = \frac{z^2 + 1}{z}.$$

On écrira $M = T(m)$.
On désigne par $\left(\text{P}^\star\right)$ le plan privé du point O.
Soit (e) un sous-ensemble de $\left(\text{P}^\star\right)$; on appelle $E = T(e)$ l'ensemble des points M transformés par T des points m de (e).

Partie A

1. Montrer que T est une application de $\left(\text{P}^\star\right)$ dans (P).
   Montrer que tout point M de (P) est le transformé par T de deux points m_1 et m_2 de $\left(\text{P}^\star\right)$, à l'exception d'un point A qui n'est le transformé que d'un point a et d'un point B qui n'est le transformé que d'un point b.
2. z_1 et z_2 étant les affixes des points m_1 et m_2 ayant le même transformé M d'affixe Z donnée, établir la relation

$$z_1 \,.\, z_2 = 1;$$

   en déduire la construction de m_2 connaissant m_1.
   Montrer que $z_1 + z_2 = Z$ et construire alors $M = T(m)$ connaissant m.

3. Le sous-ensemble (e) étant donné, il existe donc un deuxième sous-ensemble (e') de (P) tel que

$$E = T(e) = T\left(e'\right).$$

Montrer que (e') est le transformé de (e) par le produit commutatif d'une inversion et d'une symétrie droite.

4. Montrer que T n'a pas de point double. Montrer que les coordonnées $(X~;~Y)$ de M sont liées aux coordonnées $(x~;~y)$ de m par les relations

$$X = x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{et} \quad Y = y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Partie B

1. **a.** Déterminer (e_1) tel que $T\,(e_1)$ soit la droite $x'x$.

b. Déterminer (e_2) tel que $T\,(e_2)$ soit la droite $y'y$.

c. Déterminer (e_3) tel que, quel que soit m de (e_3), les trois points O, m et $M = T(m)$ soient alignés.

2. Soit (e_4) le cercle de centre O et de rayon R.

a. Montrer que $(E_4) = T\,(e_4)$ est un segment de droite si $R = 1$, une ellipse si $R \neq 1$.

b. Déterminer $\left(e'_4\right)$ tel que $(E_4) = T\,(e_4) = T\left(e'_4\right)$.

N. B. - Les questions B, 1. et B, 2. sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.