∽ Baccalauréat A1 Bordeaux[1] juin 1994 ∾

EXERCICE **5 points**

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
À la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun un billet dont :
7 pour la gare B (prix du billet 50 francs)
5 pour la gare C (prix du billet 60 francs)
4 pour la gare D (prix du billet 75 francs).

1. On choisit au hasard un de ces voyageurs. Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet (en francs).
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. On choisit au hasard trois de ces voyageurs.
   a. Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.
   b. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.
   c. Quelle est la probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination.

PROBLÈME **15 points**

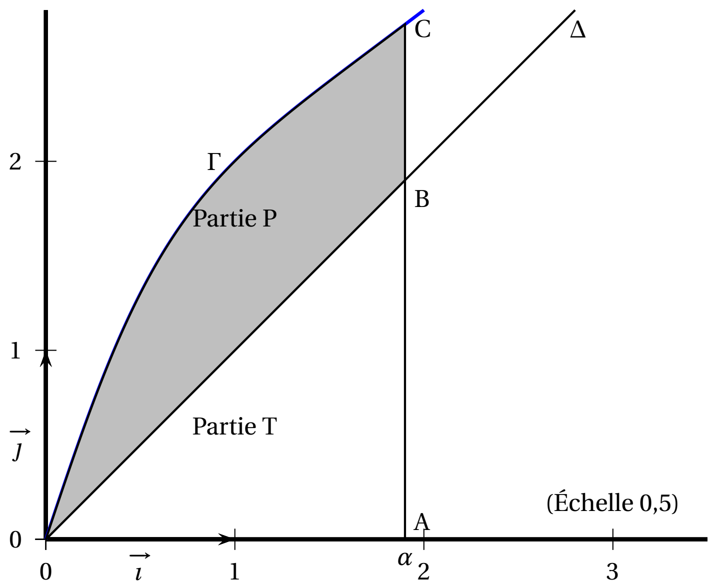
Les trois parties sont largement indépendantes.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm). Dans ce repère, on a tracé (ci-après) la courbe Γ représentative de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}.$$

On y trouvera également la droite Δ d'équation $y = x$ et la droite d parallèle à l'axe des ordonnées $\left(\text{O} ; \vec{\jmath}\right)$.
Cette droite d coupe respectivement l'axe des abscisses, Δ et Γ aux points A, B et C de même abscisse appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$.
La réunion de la partie hachurée P et de la partie tramée représente à l'échelle 1/50$^{\text{e}}$ la voile d'un bateau.
Les parties P et T exigent des toiles différentes, mais doivent avoir la même aire. Le but du problème est de choisir le nombre α de telle sorte que les aires des parties P et T soient égales.

1. Caen-Clermont-Ferrand-Limoges-Nantes-Orléans-Poitiers-Rennes-Tours



Partie 1

Étude du bord supérieur de la voile

Aucune représentation graphique n'est demandée pour cette partie 1.

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x positif, $g(x) = x + \dfrac{2x}{x^2+1}$.
2. **a.** En déduire que la droite Δ est asymptote à la courbe Γ.

   b. En déduire également la position de la courbe Γ par rapport à la droite Δ.

Partie 2

Calcul des aires de P et de T

Le nombre α est celui précisé dans le préambule.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\alpha} \dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

   On exprimera le résultat en fonction du nombre positif α.
2. Calculer, en fonction de α, l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et la droite d équation $x = \alpha$.

   On pourra utiliser le résultat établi en 1. de la partie 1.
3. Calculer, en fonction de α, l'aire en cm^2 de la partie tramée T, puis en déduire l'aire de la partie hachurée P.

Partie 3

Détermination du nombre $\boldsymbol{\alpha}$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right) - \frac{x^2}{2}$$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée, de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $x(1-x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f (on admettra que la limite en $+\infty$ de f est $-\infty$).

   On ne demande pas de représenter f.

2. a. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
b. Démontrer l'égalité $\ln\left(\alpha^2 + 1\right) = \dfrac{\alpha^2}{2}$.
En déduire que, pour cette valeur α, les aires des parties P et T sont égales et indiquer la solution du problème posé en préambule.