

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Bordeaux juin 1969 ∞

EXERCICE 1

1. Soit la fonction f définie, sur l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x) = x \operatorname{Log} x \text{ si } x > 0, \end{cases}$$

où $\operatorname{Log} x$ représente le logarithme népérien du nombre x .

Etudier les variations de la fonction f , tracer la courbe (C) représentant ces variations et déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

2. Calculer la dérivée de la fonction g définie, sur l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g(x) = x^2 \operatorname{Log} x - \frac{x^2}{2} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Soit h la fonction définie, sur l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$h(x) = |f(x)|.$$

Soit (C') la courbe représentant les variations de la fonction h . Trouver l'aire de la boucle déterminée par les courbes (C) et (C').

EXERCICE 2

Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} = 0 \pmod{5}.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé, $x'Ox$, $y'Oy$. Soit \mathcal{I} l'inversion de pôle O et de puissance 9 et soit \mathcal{E} l'ensemble des cercles du plan qui coupent $x'Ox$ en deux points, M et M' , inverses dans \mathcal{I} .

1. Montrer que tout cercle de \mathcal{E} est orthogonal à un cercle fixe, (O), qui coupe l'axe $x'x$ en A et B (l'abscisse de A étant supérieure à celle de B).

Déterminer l'ensemble des centres des cercles de \mathcal{E} .

Soit l'équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de la famille \mathcal{E} est $c = 9$ et $a \geq 9$.

2. Soit (D_1) une droite non parallèle à $y'Oy$ et \mathcal{E}_1 le sous-ensemble de \mathcal{E} des cercles centrés sur (D_1) . Montrer que \mathcal{E}_1 est contenu dans un faisceau linéaire de cercles.

3. Soit (D_2) la droite d'équation $y = 1$ et \mathcal{E}_2 le sous-ensemble de \mathcal{E} des cercles tangents à la droite (D_2) .

Montrer, à l'aide de l'inversion \mathcal{I} , que les cercles de \mathcal{E}_2 sont tangents à un cercle fixe, (Γ) , dont on précisera le centre et le rayon.

Trouver une condition concernant a, b et c pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de \mathcal{E}_2 . En déduire l'ensemble des centres des cercles de \mathcal{E}_2 .

4. Soit \mathcal{E}_3 le sous-ensemble de \mathcal{E} des cercles tangents au cercle (C) , de rayon 1, dont le centre a pour coordonnées $(0 ; +2)$.

Montrer, à l'aide de l'inversion \mathcal{I} , que les cercles de \mathcal{E}_3 sont tangents à un cercle, (C') , dont on précisera le centre et le rayon.

Trouver une relation entre a et b pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de \mathcal{E}_3 . En déduire l'ensemble des centres des cercles de \mathcal{E}_3 , [Il pourra être utile d'effectuer une translation du repère, la nouvelle origine étant le point $(0 ; +4)$.]

N. B. - Les questions 2., 3. et 4. sont indépendantes entre elles.