Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1974 Bordeaux

Exercice 1

1. Déterminer le plus grand commun diviseur d des nombres :

$$a = 4\,420, \qquad b = 2\,772$$

2. Déterminer les restes dans la division par 5 des entiers naturels 12^a, 12^a, 12^b.

Exercice 2

II - Soit un espace vectoriel E, muni d'une base $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\imath}\right)$ et soit f l'endomorphisme de E défini dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour λ réel, on désigne par E_λ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f\left(\vec{u}\right) = \lambda\vec{u}$.

1. Montrer que si λ est différent de $\dfrac{1}{2}$ et de $\dfrac{1}{4}$, E_λ est égal à $\left\{\vec{0}\right\}$.
2. Montrer que $\mathrm{E}_{\frac{1}{2}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{I} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et que $\mathrm{E}_{\frac{1}{4}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{J} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
   Vérifier que $\left(\vec{I}\,,\ \vec{J}\right)$ est une base $\mathcal{B}'$ de E.
3. À partir du vecteur $\overrightarrow{u_0} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ qu'on exprimera en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$ on définit une suite de vecteurs par la relation $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$. Quelles sont dans la base $\mathcal{B}'$ les coordonnées de $\overrightarrow{u_n}$? Quelles sont dans la base $\mathcal{B}$ les coordonnées de $\overrightarrow{u_n}$?
   cherchera pas à déterminer K).

Problème

1. Étudier la fonction f de la variable réelle t définie par

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}.$$

   Construire la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

2. x étant un nombre réel positif ou nul on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   a. Démontrer que F est définie pour tout x positif ou nul et que F est dérivable en tout point de l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$? (On ne cherchera pas à calculer explicitement $F(x)$).
   En déduire le sens de variation de F.
   b. Démontrer que : $\forall x \geqslant 1,\quad \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer, à l'aide de cette inégalité, que la fonction F est bornée. En déduire que F admet une limite K lorsque x tend vers $+\infty$. (*On ne cherchera pas à déterminer* K).

c. En déduire que F définit une bijection de $[0~;~+\infty[$ sur $[0~;~K[$.
Construire la courbe représentative de F.

3. x étant un nombre réel positif ou nul on note $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Exprimer G à l'aide de la fonction F.
Démontrer que G est dérivable en tout point de l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et montrer que la fonction dérivée de G est

$$x \longmapsto 2x\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}$$

b. Étudier la fonction φ définie pour x *réel positif* ou nul par :

$$\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^4+x^2} - 1.$$

Démontrer l'existence de deux nombres réels α_1 et α_2 tels que

$$0 < \alpha_1 < \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2} \quad \text{et} \quad 1 < \alpha_2 < 2$$

vérifiant $\varphi(\alpha_1) = 0$ et $\varphi(\alpha_2) = 0$

c. En déduire la variation de G.
Construire la courbe représentative de G.

N. B. - On précisera avec le plus grand soin les théorèmes invoqués.