Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Bordeaux

EXERCICE 1

On considère la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{u_{n-1}+5}{3}$ et la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ $\left(v_n = \dfrac{1}{3^n}\right)$; on ne cherchera pas dans cette question à calculer u_n.
2. Soit $\left(S_p\right)$ la suite dont le terme général est la somme des p premiers termes de la suite (v_n).
   a. Montrer que $\left(S_p\right)$ est convergente et trouver sa limite.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.
3. On partage l'intervalle $[0~;~a]$ où $a > 0$ en intervalles partiels de même amplitude égale à av_n.
   Calculer $\displaystyle\int_0^a x^3\,\mathrm{d}x$ en considérant cette intégrale comme la limite pour n tendant vers l'infini d'une somme de Riemann σ_n relative à la subdivision de $[0~;~a]$ considérée.
   $\left(\text{On pourra prendre } \sigma_n = av_n\Sigma_{k=1}^{k=3^n}\left(kav_n\right)^3~;~v_n = \dfrac{1}{3^n}\right)$.
   On rappelle que la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale à $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

II.

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère la similitude S de centre O, d'angle θ, $(\theta \neq 2k\pi)$ de rapport r, et la rotation R de centre A (de coordonnées $(1, \sqrt{3})$) et d'angle φ $(\varphi \neq 2k\pi)$.

1. Montrer que les transformations d'une même figure (F) par le produit $R \circ S$ et par le produit $S \circ R$ se déduisent l'une de l'autre par une translation.
2. On donne $\theta - \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.
   Déterminer r de façon que le vecteur définissant la translation du 1. soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
   (Toute forme de solution est acceptée : géométrique, par les complexes...)

III.

A) On appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites numériques (applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ notées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si l'on considère sur $\mathscr{E}$ les lois suivantes
$\forall\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}, \forall\,(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\forall\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
$(\mathscr{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $\overrightarrow{0}$ l'élément neutre.
Dans la suite, $\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

1° Vérifier que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
Montrer que l'application φ de $\mathscr{F}$ vers $\mathbb{R}^2$ qui à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe le couple $(u_0,\ v_0)$ est une application linéaire bijective. En déduire la dimension de $\mathscr{F}$.

2° Soit $\overrightarrow{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\overrightarrow{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathscr{F}$. Montrer que $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ dans $\mathscr{F}$ équivaut à

$$\lambda u_0 + \mu v_0 = 0, \qquad \lambda u_1 + \mu v_1 = 0.$$

En déduire que $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est une partie libre de $\mathscr{F}$ si, et seulement si $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$.

3° a) Soit r un réel non nul. Montrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{F}$ si, et seulement si $2r^2 - 3r - 2 = 0$.

b) En déduire l'existence dans $\mathscr{F}$ de deux suites du type précédent qu'on notera $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$. Montrer que $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de $\mathscr{F}$.

c) En déduire la forme générale des éléments de $\mathscr{F}$. Déterminer ces éléments $\overrightarrow{u}$ en fonction de u_0 et de u_1.

B) Pour toute application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f quand elle existe.
On appelle $\mathscr{S}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant

$$2f^{(2)} - 3f^{(1)} - 2f = \theta$$

(où θ désigne l'application nulle).

1° Démontrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Établir que les applications φ et ψ telles que

$$\varphi(x) = e^{2x} \qquad \text{et } \psi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{R}$$

sont des éléments linéairement indépendants de $\mathscr{S}$.
Remarque : Il y avait déjà une application φ au A1° ...

2° Soit f appartenant à $\mathscr{S}$. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}$ appartient à $\mathscr{S}$ pour tout entier n.
En déduire que f appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si f possède des dérivées de tous ordres et si pour tout réel x la suite de terme général $f^{(n)}(x)$ appartient à $\mathscr{F}$.

3° On veut montrer que $\mathscr{S}$ est engendré par φ et par ψ.
Soit f un élément de $\mathscr{S}$. Montrer que pour

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha f + \beta\varphi + \gamma\psi = \theta$$

implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha f^{(n)} + \beta\varphi^{(n)} + \gamma\psi^{(n)} = 0.$$

Quelle est la forme générale des éléments de $\mathscr{S}$?