Baccalauréat C Bordeaux juin 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

n étant un entier relatif quelconque, on pose :

$$A = n - 1 \qquad \text{et} \qquad B = n^2 - 3n + 6$$

1. **a.** Montrer que le p.g.c.d. de A et B est égal au p.g.c.d. de A et 4.
   b. Déterminer, suivant les valeurs de n, le p.g.c.d. de A et B.
2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, le nombre $\dfrac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif ?

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Dans E, plan affine euclidien, A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral, tels que $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{AC}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{BC}}\right\| = d$, où d est un réel positif non nul.

1. Déterminer l'ensemble des réels a tels que les points A, B, C affectés respectivement des coefficients a, 1, 1, admettent un barycentre G_a.
   Quel est l'ensemble des points G_a ainsi obtenus ?
2. On prend $a = 1$.
   Déterminer le point G_1 correspondant.
   On pose $f_1(M) = M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $f_1(M) = 2d^2$.
3. On prend $a = -2$.
   Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V}(M) = -2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}$ est un vecteur indépendant de M qu'on précisera.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que $f_2(M) = -2M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2$ soit égal à 0.

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel muni d'une base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Pour tout couple $(a\,;\,b)$ de réels, on définit une application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, notée $\varphi_{a,\,b}$ dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est :

$$\begin{pmatrix} a - b & b \\ 0 & a + b \end{pmatrix}$$

On désigne par $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications linéaires $\varphi_{a,\,b}$ lorsque a et b décrivent $\mathbb{R}$.

1. **a.** Quelle est la nature de $\varphi_{1,\,0}$?
   b. Montrer que $\varphi_{1,\,0}$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
   c. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ et vérifier que $\left(\varphi_{1,\,0}\,;\,\varphi_{0,\,1}\right)$ est une base de $\mathscr{A}$. Quelles sont les coordonnées de $\varphi_{a,\,b}$ dans cette base ?
   Pour faire, de l'ensemble $\mathscr{E}$ des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on définit les opérations + et . comme suit :

- si f et g sont dans $\mathcal{E}$, $f+g$ est défini par :

$$(f+g)\left(\overrightarrow{x}\right)=f\left(\overrightarrow{x}\right)+g\left(\overrightarrow{x}\right).$$

- si f est dans $\mathcal{E}$, et λ dans $\mathbb{R}$, $\lambda\cdot f$ est défini par :

$$(\lambda\cdot f)\left(\overrightarrow{x}\right)=f\left(\lambda\overrightarrow{x}\right).$$

2. On munit $\mathscr{A}$ de la loi d'addition des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ notée + et de la loi de composition des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ notée $\circ$.
Montrer que $(\mathscr{A}, +, \circ)$ est un anneau commutatif, unitaire. Déterminer les éléments inversibles de cet anneau.

Partie B

Soit (P) un plan affine d'espace vectoriel associé à $\mathscr{P}$. On munit (P) du repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
Pour tout réel b non nul, on note f_b l'application affine de (P) dans (P) qui au point m de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point M de coordonnées $(X~;~Y)$ défini par

$$\left\{\begin{array}{l c l}X&=&-bx+by+1\\Y&=&by\end{array}\right.$$

1. Vérifier que l'application linéaire associée à f_b appartient à l'ensemble $\mathscr{A}$ défini à la partie A.

2. Déterminer, suivant les valeurs de b, l'ensemble des points invariants par f_b.

3. **a.** On suppose : $b=1$. Montrer que f_1 est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y=2x-1$ parallèlement à l'axe $x'\text{O}x$.

b. On suppose : $b=-1$. Montrer que f_1 est la composée commutative d'une symétrie par rapport à une droite contenant O et d'une translation.

c. On suppose : $b\neq 1$ et $b\neq -1$. Montrer que $f\,b$ est la composée commutative d'une homothétie et d'une symétrie par rapport à une droite.

Partie C

On suppose maintenant que (P) est un plan affine euclidien et que le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$est orthonormé. On considère le mouvement d'un point m de (P) dont les coordonnées sont données par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x&=&-2t+2\text{e}^t+1\\y&=&-2t+4\text{e}^t+1\end{array}\right.,\quad t\ \text{réel quelconque. } (t \text{ est la date})$$

On note (γ) la trajectoire du point m lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

1. Montrer que (γ) admet en chacun de ses points une tangente et montrer qu'il existe un unique point A de (γ), que l'on déterminera, tel que la tangente en A à (γ) soit parallèle à l'axe $y'\text{O}y$.

2. Soit M le transformé du point m par la symétrie f_1 définie à la partie B. Quelles sont, en fonction de t, les coordonnées $(X~;~Y)$ du point M?
Calculer Y en fonction de X.

3. Soit la fonction numérique F définie par

$$F(X)=2\text{Log}\left(\frac{2}{X-1}\right)+2X-1$$

(X étant une variable réelle qui parcourt l'ensemble de définition de F que l'on précisera).

Étudier cette fonction F et tracer sa représentation graphique (Γ) relativement au repère $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Pour étudier le comportement de $F(X)$ pour $X \to +\infty$, on recherchera les limites, pour $X \to +\infty$, de $\dfrac{F(X)}{X}$ et de $F(X) - 2X$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Γ) et de la droite d'équation $Y = 2X - 1$ dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

4. Déduire des questions précédentes le tracé de la trajectoire (γ) du point m.