∽ Baccalauréat C Bordeaux juin 1979 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Trouver les couples (a, b) d'entiers naturels $(0 < a < b)$ dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifiant

$$2m+3d=78$$

et tels que a ne divise pas b.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

L'espace affine euclidien orienté E de dimension trois est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On désigne par Δ la droite de E, dirigée par $\vec{\imath}$, passant par le point A de coordonnées $(0 ; 0 ; 1)$ et par R la rotation d'axe Δ qui transforme le point O en le point O$'$ de coordonnées $(0 ; -1 ; 1)$.
Trouver les coordonnées $\left(x_1 ; y_1 ; z_1\right)$ du point M_1 transformé d'un point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ par la rotation R.
On désigne par T la translation de vecteur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ et par V la transformation composée $V = T \circ R$.
Trouver les coordonnées $\left(x_2 ; y_2 ; z_2\right)$ du point M_2 transformé d'un point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ où $M_2 = V(M)$.
Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application V.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

On désigne par a, h, t, x des nombres réels.

1. Déterminer trois constantes réelles A, B et C telles que, quel que soit $t > 0$:

$$\frac{1}{t(1+t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{1+t}.$$

2. Déterminer trois constantes réelles A', B' et C' telles que , quel que suit $t > 0$:

$$\frac{-1}{t^2(1+t)}=\frac{A'}{t^2}+\frac{B'}{t}+\frac{C'}{1+t}.$$

3. Pour $0 < a < b$, justifier l'existence des intégrales :
dt

$$I(a,\ b)=\int_a^b \frac{1}{t(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad J(a,\ b)=-\int_a^b \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $I(a,\ b) \geqslant 0$ et $J(a,\ b) \leqslant 0$.
Calculer $I(a,\ b)$ et $J(a,\ b)$.

4. Le nombre réel $a > 0$ étant fixé, montrer que $I(a,\ b)$ et $J(a,\ b)$ tendent vers des limites réelles $F(a) = \lim\limits_{b\to+\infty} I(a,\ b)$ et $G(a) = \lim\limits_{b\to+\infty}$ quand b tend vers $+\infty$ telles que : $G(a) \leqslant 0 \leqslant F(a)$.

Partie B

Dans la suite du problème on pose, pour $x > 0$:

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \log\dfrac{1+x}{x} - \dfrac{1}{1+x} \\ C(x) & = & \log\dfrac{1+x}{x} - \dfrac{1}{x} \end{array}$$

où log désigne la fonction logarithme népérien.

1. Soit θ l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe « $(1+x) - x$.
   Du signe de $\theta'(x)$ et de la valeur de $\theta(0)$ déduire que $\theta(x) < 0$ pour $x > 0$. (θ' désigne la dérivée de θ).
   Soit φ l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $\log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.
   Du signe de $\varphi'(x)$ et de la valeur de $\varphi(0)$ déduire que $\varphi(x) > 0$ pour $x > 0$. (φ' désigne la dérivée de φ).
   Prouver alors que, pour tout $x > 0$: $-\dfrac{1}{2x^2} < G(x) < 0$.
2. Soit ψ l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $\log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.
   Étudier le signe de ψ pour $x > 0$ et en déduire que $F(x) > 0$ pour $x > 0$.
3. Montrer que, quel que soit $x > 0$,
   $$F(x) - G(x) < \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad 0 < F(x) < \frac{1}{x^2}.$$
4. Des inégalités $G(x) < 0 < F(x)$, déduire que, pour tout $x > 0$
   $$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

Partie C

1. Soit α un nombre réel supérieur ou égal à 1 . Montrer que
   a. $0 \leqslant \displaystyle\int_1^\alpha F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$.
   b. $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_1^\alpha G(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
2. CalcuLer $K(\alpha) = \displaystyle\int_1^\alpha F(x)\,\mathrm{d}x$.
   (On pourra intégrer par parties). En déduire $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} K(\alpha)$.
3. Calculer $L(\alpha) = \displaystyle\int_1^\alpha G(x)\,\mathrm{d}x$ et déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} L(\alpha)$.