∽ Baccalauréat C Bordeaux juin 1981 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Soit D la droite de P d'équation : $2x - 3y + 1 = 0$.

1. Déterminer l'ensemble E des points de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. Déterminer le sous-ensemble F des points de E dont le carré de la distance au point O est multiple de 5.
Préciser les points de F dont les coordonnées sont strictement comprises entre -20 et $+20$.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et i un nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$.

1. Calculer $\left(\frac{1}{2}\text{i}\sqrt{3}\right)^4$.

2. Déterminer les nombres réels a, b tels que

$$(a + \text{i}b)^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)\text{i}.$$

PROBLÈME **14 POINTS**

Partie A

Soit a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel $n \geqslant 1$; on appelle f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle réel $\left[-\frac{1}{a}\,;\,\frac{1}{a}\right]$ par

$$f_n(x) = \left(1 - a^2x^2\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Soit Γ_n la courbe représentative de f_n dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les coniques C_1 et C_2 contenant respectivement Γ_1 et Γ_2.
Préciser la nature de ces coniques. Indiquer leurs foyers et les directrices associées (discuter selon les valeurs de a).

2. Étudier les variations de f_3.
Tracer Γ_1, Γ_2, Γ_3 dans un même repère en prenant $a = 2$. (On ordonnera les réels $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ pour le tracé de Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Partie B

1. Soit α un nombre réel appartenant à $[0\,;\,\pi]$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de Γ_1 avec la droite d'équation

$$(\cos\alpha)\,y - a(\sin\alpha)\,x = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq \pi.$$

2. a. On désigne par D_α l'ensemble des points M de P dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{ccccl} -\dfrac{1}{a} & \leqslant & x & \leqslant & \dfrac{1}{a} \quad \text{et} \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & \sqrt{1-a^2x^2} \end{array}\right.$$

On désigne par P_α le demi-plan formé des points M dont les coordonnées $(x\,;\ y)$ vérifient

$$(\cos\alpha)\,y - a(\sin\alpha)x \leqslant 0.$$

(étudier la position du point $(1\,;0)$ par rapport au demi-plan P_α).
Soit $D_\alpha = D_\pi \cap P_\alpha$.
L'aire de D_α est notée $\mathscr{A}(\alpha)$.
Démontrer que pour tout a $\alpha \in [0,\ ;\ \pi]$ on a

$$\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2a} - \int_0^{\frac{\cos\alpha}{a}} \sqrt{1-a^2x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

$\Big($On distinguera pour cela trois cas : $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha \in \left[0\,;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]\Big)$.

b. Démontrer que la fonction $\mathscr{A}\ :\ \alpha \longmapsto \mathscr{A}(\alpha)$ est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, et définir la fonction dérivée $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ sur cet intervalle.
En déduire que pour tout $\alpha \in [0\ ;\ \pi]$ on a $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{\alpha}{2a}$.

Partie C

Soit T_a l'application affine de P dans P qui à tout point m de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ telles que

$$X = ax, \qquad Y = y.$$

Quelles sont les images de Γ_1 et D_α par T_a ? Calculer l'aire de l'image de D_α par T_a.

Partie D

On suppose dans la suite que $\alpha \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Soit un point mobile dans le plan P dont les coordonnées à la date t $(t \in \mathbb{R})$ sont

$$\left\{\begin{array}{ccl} x(t) & = & \cos(\alpha\cos^2 t) \\ y(t) & = & \sin(\alpha\cos^2 t). \end{array}\right.$$

Étudier les fonctions : $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$.
En déduire la trajectoire de M et décrire le mouvement de M (on ne cherchera pas à vérifier si le mouvement est accéléré ou retardé).