Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Bordeaux

EXERCICE 1

Dans un plan affine euclidien P on considère un triangle équilatéral (A, B, C) inscrit dans un cercle (Γ).
Soit M un point, distinct de A et de C, situé sur celui des arcs AC dont B n'est pas élément. I est le point du segment [MB] tel que $M\text{I} = M\text{A}$.

1. Montrer que le triangle (I, M, A) est équilatéral.
2. On oriente le plan P de façon qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ soit $+\dfrac{\pi}{3}$. Soit r la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $+\dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer les images par r des points B et I.
   En déduire

$$M\text{A} + M\text{C} = M\text{B}.$$

EXERCICE 2

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et i un élément de $\mathbb{C}$ tel que $\text{i}^2 = -1$.
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f(z) = z^4 + 2\sqrt{3}(1+2\text{i})z^3 - 4(1-6\text{i})z^2 - 8\sqrt{3}(4-6\text{i})z - 192.$$

Démontrer qu'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{C}$ tels que pour tout élément z de $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \left(z^2 + 2\sqrt{3}z + 2\text{i}\right)\left(z^2 + az + b\right).$$

Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
Préciser le module et l'argument de chaque solution.
Calculer le produit de ces quatre racines.

PROBLÈME

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ω étant un nombre réel non nul, on considère les fonctions f_ω et g_ω, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f_\omega(x) = \text{e}^{-\omega x}\sin\omega x \quad \text{et} \quad g_\omega(x) = \text{e}^{-\omega x}\cos\omega x$$

et $\mathcal{F}_\omega$ désignera le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par f_ω et g_ω.

Partie A

1. **a.** Démontrer que le couple $\left(f_\omega,\ g_\omega\right)$ détermine une base de $\mathcal{F}_\omega$.
   b. Montrer que tout élément de $\mathcal{F}_\omega$ admet une dérivée élément de $\mathcal{F}_\omega$.
2. On considère l'application φ_ω de $\mathcal{F}_\omega$ vers $\mathcal{F}_\omega$, qui à tout élément f de $\mathcal{F}_\omega$ fait correspondre la fonction dérivée f' de f.
   a. Démontrer que φ_ω est un endomorphisme de $\mathcal{F}_\omega$; déterminer sa matrice M_ω, relativement à la base $\left(f_\omega,\ g_\omega\right)$; montrer que φ_ω est bijectif.

b. À la matrice M_ω est associé le nombre complexe $z_\omega = -\omega + \omega\mathrm{i}$. (i étant un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$).

Déterminer les entiers naturels n supérieurs ou égaux à 1 pour lesquels z_ω^n est un nombre réel; quelle est alors la nature de l'endomorphisme $\varphi_\omega^n = \varphi_\omega \circ \varphi_\omega \circ \cdots \circ \varphi_\omega$, composé de n termes égaux à φ_ω.

Partie B

1. On pose $\omega = 2$ et on considère la fonction

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x \end{array}$$

a. Étudier les variations de f_2 pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$.

b. Soit $\mathscr{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives $y = \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x$ et $y = \mathrm{e}^{-2x}$ relativement à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Calculer les abscisses des points communs à $\mathscr{C}$ et Γ et démontrer qu'en chacun de ces points les courbes $\mathscr{C}$ et Γ ont même tangente.

c. Construire l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant à l'intervalle $[0 ; \pi]$ dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra $\left\|\vec{\imath}\right\| = 3$ et $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 10$, en centimètres). Construire également Γ.

2. a. Déterminer pour $\omega = 2$ l'endomorphisme réciproque φ_ω^{-1} de l'endomorphisme φ_ω, de la question A 2. En déduire les primitives, sur $\mathbb{R}$, des fonctions f_2 et g_2.

b. Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$F(X) = \int_0^X f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(X)$.

3. a. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

b. a et b étant deux nombres réels calculer

$$I(a,\ b) = \int_0^\pi \left(a\mathrm{e}^{-x}\sin x + b\mathrm{e}^{-x}\cos x\right)^2\,\mathrm{d}x$$

en fonction de a et b.

c. Démontrer que $\forall (a,\ b) \in\in \mathbb{R}^2,\quad I(a,\ b) = 0 \Rightarrow a = b = 0$ et en déduire que l'application Φ de $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_1$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f,\ g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire.