∽ Baccalauréat C groupe 4 [1] juin 1984 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

θ désigne un nombre réel appartenant à $[0\,;\,2\pi[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - \left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)z + 2^{2\theta} = 0.$$

   Donner chaque solution sous forme trigonométrique.

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
   Déterminer θ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatéral.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère trois points A, B et C tels que :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\| = 4d \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\| = 2d,$$

où d est un réel strictement positif donné.
On considère les points A, B et C affectés respectivement des coefficients λ, 1 et 1 où $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

1. Déterminer l'ensemble Δ des barycentres G_λ de ces points quand λ décrit $\mathbb{R} - \{-2\}$.
2. Dans le cas où $\lambda = -1$, on appelle G le barycentre des points affectés respectivement des coefficients -1, 1 et 1.
   a. Déterminer G.
   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}}\right\|^2.$$

3. **a.** Démontrer que pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{A}}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.
   b. Déterminer l'ensemble Δ' des points M du plan P tels que :

$$\left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}}\right\|^2 = 32d^2.$$

PROBLÈME **11 POINTS**

On considère l'application f de $]-1\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et } f(0) = 1.$$

$\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier la continuité de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Poitiers, Rennes

2. Étudier la dérivabilité de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
Expliciter la fonction dérivée f'.

3. **a.** On note g l'application de $]-1\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x).$$

Étudier les variations de g et le signe de $g(x)$. (On ne demande pas l'étude de la limite de g pour $x = -1$)

b. En déduire les variations de f.

4. Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

5. Construire la courbe $\mathscr{C}$. Préciser les droites asymptotes et la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

6. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente (on étudiera les variations de l'application h de $]-1\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2\left(\frac{1}{2} + f'(x)\right)$, puis le signe de $h(x)$).

Partie B

1. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ℓ de l'intervalle $]0\,;\,1[$ tel que $f(\ell) = \ell$. (On pourra considérer la fonction $k(x) = f(x) - x$ sur $[0\,;\,1]$. On ne demande pas de calculer ℓ).

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0\ ;\ 1[$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$. (On remarquera que $u_{n+1} - \ell = f\left(u_n\right) - f(\ell)$ et on utilisera le résultat :
$\forall x \in [0;+\infty[,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$).

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Partie C

1. a et b sont deux nombres réels de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ tels que $a < b$, établir les inégalités :

$$(b-a)f(b) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f(a).$$

En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan limitée par l'axes des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, en utilisant la subdivision $\left(0\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\ ;\ \frac{4}{5}\ ;\ 1\right)$.

2. Trouver la limite de $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque t tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat :

$$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[, \quad \frac{1}{x+1} - f(x) \leqslant 0$$

que l'on déduira du signe de $f'(x)$.

3. **a.** Démontrer que :

$$\forall x \in \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right],\quad 0 < f(x) \leqslant -2\ln(x+1).$$

En déduire que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $\left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right]$ on a :

$$0 \leqslant \int_t^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x < 1+\ln 2.$$

b. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$v_n = \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Étudier la croissance de cette suite.
Démontrer que cette suite est convergente.