

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1985 Bordeaux¹ ∞

EXERCICE 1

5 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z, z^2, z^3 où z désigne un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points M_1, M_2, M_3 soient deux à deux distincts.
2. On suppose les points M_1, M_2, M_3 deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des points M_1 tels que l'un des angles du triangle $M_1M_2M_3$ soit un angle droit.

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC.

A', B', C' désignent les milieux respectifs des bipoints (B, C), (C, A), (A, B).

1. Montrer qu'il existe un point P et un seul vérifiant les propriétés suivantes $PA = PC$ et une mesure de l'angle en radians de $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC})$ est égale à $+\frac{\pi}{2}$.

Soit Q le point tel que : $QA = QB$ et une mesure de l'angle en radians de $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{PA})$ est égale à $+\frac{\pi}{2}$.

2. a. On désigne par :

- r_P la rotation de centre P et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$;
- r_Q la rotation de centre Q et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$;
- $s_{A'}$ la symétrie par rapport au point A' .

Étudier l'image de A par l'application $f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P$.

3. Quelle est la nature du triangle $A'PQ$?

PROBLÈME

11 points

Partie A

Étude d'une fonction numérique définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer

1. Démontrer que pour tout nombre réel x élément de l'ensemble $\left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$ l'intégrale

$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$ est définie (ln désigne la fonction logarithme népérien).

On considère l'application :

$$f : \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt.$$

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

2. Démontrer que f est dérivable en tout point de l'ensemble de définition, et que pour tout x élément de $]0; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[: f'(x) = \frac{\ln \frac{x}{2}}{(\ln 2x)(\ln x)}$.

Déterminer le sens de variation de f .

3. a. Démontrer que pour tout x élément de $]0; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[:$

$$\frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}.$$

b. Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers zéro.

c. Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. On considère l'application $\Psi :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \Psi(t) = 2 - 2t + \ln t$.

De l'étude des variations de Ψ sur $]0; 1]$ (sens de variation de Ψ et limites de Ψ aux bornes de l'intervalle de définition) déduire l'existence d'un unique nombre réel α élément de $]0; \frac{1}{2}[$, tel que $\Psi(\alpha) = 0$ et justifier que pour tout nombre réel t élément de $[\alpha, 1]$, on a : $\ln t \geq 2t - 2$.

Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que pour tout x élément de $[\alpha; \frac{1}{2}[$ $f(x) \leq$

$$\frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt.$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

5. Démontrer que pour tout nombre réel t élément de $]1; +\infty[:$

$$\ln t \leq t - 1.$$

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

6. a. Résumer dans un tableau l'étude des variations de f .

b. On note (\mathcal{C}) la courbe-freprésentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(\mathcal{C}') = (\mathcal{C}) \cup \{O\}$.

Donner l'allure de la courbe (\mathcal{C}') en précisant la tangente en 0 et les droites asymptotes.

Partie B

Étude d'une famille de fonctions numériques définies par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer

On considère, pour chaque entier n supérieur ou égal à 2, l'application :

$$g_n :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g_n(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt.$$

et on désigne par (Γ_n) la courbe représentative de g_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. n et m étant des entiers tels que : $2 \leq n < m$, étudier la position relative des courbes (Γ_n) et (Γ_m) .

2. Démontrer que g_n est dérivable en tout point de l'intervalle $]1; +\infty[$ et expliciter sa fonction dérivée.

En déduire que (Γ_n) admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point d'abscisse $u_n = \frac{1}{n^{n-1}}$ et d'ordonnée $v_n = g_n(u_n)$.

3. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente et préciser sa limite.
b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < e \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < 1.$$

(on pourra utiliser le résultat : pour tout réel t élément de $]1; +\infty[$,
 $\ln t < t - 1$).

En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

4. Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 2}$.