Baccalauréat C Bordeaux juin 1986 [1]

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.
On désigne par F l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$F(z) = \frac{z^3}{2+|z|^3}.$$

et par φ l'application de P dans P qui associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe $F(z)$.

1. Soit $z = r\text{e}^{\text{i}\alpha}$ où le couple $(r\ ;\ \alpha)$ appartient à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
   Trouver un couple $\left(r'\ ;\ \alpha'\right)$ appartenant à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $F(z) = r'\text{e}^{\text{i}\alpha'}$.
2. On note f l'application de $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

   $$f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}.$$

   Démontrer que f applique bijectivement $[0\ ;\ +\infty[$ sur $[0\,;\,1[$.
3. On considère la cercle Γ de centre O et de rayon 1 et T le point d'affixe $1 - \text{i}$.
   Trouver l'image par φ du cercle Γ et de la demi-droite [OT).
   Quelle est l'image par φ de P ?

EXERCICE 2 **5 POINTS**

On considère un carré (A, B, C, D) situé dans un plan P de l'espace. O désigne le centre de ce carré, H un point distinct de O de la droite Δ perpendiculaire en O au plan P, et H′ son symétrique par rapport à O.
On note E l'ensemble {A, B, D} et F l'ensemble {B, C, D}.
L'objet de cet exercice est de décrire l'ensemble W des isométries qui appliquent E sur F.

1. Démontrer que l'ensemble W n'est pas vide.
2. Soit f un élément de W. Prouver les égalités :
   $f(\text{A}) = \text{C}$
   $f(\{\text{B},\ \text{D}\}) = \{\text{B},\ \text{D}\}$
   $f(\text{O}) = \text{O}$
   $f(\text{H}) = \text{H}$ ou $f(\text{H}) = \text{H}'$.
3. Déterminer et reconnaître tous les éléments de W.

PROBLÈME **10 POINTS**

Les parties A et B sont indépendantes
Dans tout le problème $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$(unité : 2 cm).

Partie A

1. Bordeaux Caen Clermont Ferrand- Limoges - Nantes - Orléans - Tours - Poitiers - Rennes

On désigne par f l'application de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x.$$

1. Étudier la limite de f en 0 et $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f.
Dessiner la courbe F représentant f dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2. Soit n un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, on note A_i le point de F d'abscisse 10^i.
Soit G_n le barycentre des n points $\text{A}_1, \ldots, \text{A}_n$.
Calculer en fonction de n les coordonnées x_n et y_n de G_n.

3. **a.** Vérifier que l'application ln admet pour primitive sur $]0;+\infty[$ l'application qui à x associe $x\ln x - x$.

b. Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre les droites d'équations : $x = 1$, $x = \text{e}$, $y = 0$ et la courbe F.

Partie B

On désigne par $\text{P}^\star$ l'ensemble des points de P d'abscisse non nulle et par θ l'application de $\text{P}^\star$ dans $\text{P}^\star$ qui associe à tout point M de coordonnées x et y le point M' de coordonnées x' et y' vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{1}{x}\\ y' & = & -y.\end{array}\right.$$

1. Vérifier que θ est bijective et égale à sa bijection réciproque.

2. On désigne par E le sous-ensemble de $\text{P}^\star$ d'équation $xy = -9$.
Trouver l'ensemble $\theta(\text{E})$.
Est-ce que θ conserve l'alignement ?

3. Pour tout nombre réel a, on note g_a l'application de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g_a(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} + 4a\ln x$$

et G_a sa courbe représentative dans $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Montrer l'égalité $\theta\left(G_a\right) = G_a$.