Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe II[1] juin 1987

EXERCICE 1 **5 points**

Soit n un nombre entier supérieur à 1.
On considère une urne dans laquelle se trouvent :

— une boule portant le numéro 1,

— deux boules portant le numéro 2,

— trois boules portant le numéro 3,

— etc.

— n boules portant le numéro n

1. Combien l'urne contient-elle de boules ?
2. On tire au hasard une boule dans l'urne, tous les tirages sont supposés équiprobables.

   a. On suppose dans cette question que n est pair.
   Exprimer en fonction de n la probabilité pour que la boule tirée porte :

   — un numéro pair ;
   — un numéro impair.

   b. Dans cette question, on suppose seulement que le nombre total de boules dans l'urne est 21.
   Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$. Soit A $(1~;~0)$ et B$(-1~;~0)$. À tout point M d'affixe $z \neq 0$ on associe le point M' d'affixe z' défini par

$$z \times z' = 1.$$

1. **a.** Construire M' quand $z = 2(1 + \text{i})$.

   b. Dans le cas général, montrer que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}M},~\overrightarrow{\text{O}M'}\right)$ et que $\text{O}M \times \text{O}M' = \text{OA}^2$.

2. **a.** Vérifier que

$$\forall z \in \mathbb{C}^{\star},\quad \left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2.$$

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

b. Soit I le milieu de $[MM']$. En utilisant a. montrer que

$$IA \times IB = IM^2$$

et que pour $M \neq A$ et $M \neq B$ la droite (MM') est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{IB}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

$\mathcal{R}$ désigne le repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité 5 cm).

Partie A

1. La fonction f_1 est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f_1(x) = x\ln x \quad (\ln x \text{ désigne le logarithme népérien de } x).$$

a. Étudier ses variations.
b. Montrer que f_1 admet un prolongement par continuité en 0.
c. Tracer dans le repère $\mathcal{R}$ la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction g 1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g_1(0) & = & 0 \\ g_1(x) & = & f_1(x) \text{ pour } x > 0. \end{array}\right.$$

On précisera la tangente à $\mathcal{C}_1$ à l'origine.

2. Dans cette question x désigne un réel supérieur à 1.

a. Montrer que si t est un réel vérifiant $1 \leqslant t \leqslant x$ alors

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1.$$

b. Déduire de ce qui précède et de la définition de $\ln x$, les inégalités,

$$\text{pour } x \geqslant 1,\ \frac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$

c. Démontrer pour $x \geqslant 1$ que $x - 1 \leqslant f_1(x) \leqslant x^2 - x \qquad (1).$

Partie B

Dans cette partie, on étudie la résolution de l'équation (E) d'inconnue réelle x :

$$(E) : \qquad f_1(x) = 1,$$

où f_1 désigne la fonction définie au A :

1. Démontrer que l'équation E admet une solution unique x_1 telle que

$$x_1 - 1 \leqslant 1 \leqslant x_1^2 - x_1.$$

2. Montrer que

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant x_1 \leqslant 2.$$

3. On se propose de déterminer une valeur approchée décimale de x_1 à 10^{-2} près.

a. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_1$ au point de coordonnées $(2\,;\,2\ln 2)$. Calculer l'abscisse x'_1 du point d'intersection de la tangente (T) avec la droite (D) dont une équation est $y = 1$.

b. Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée décimale à 10^{-2} près par défaut de $f_1(x_1)$; en déduire l'encadrement :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant x_1 \leqslant x'_1,$$

puis une valeur approchée décimale de x_1 à 10^{-1} près.

c. Donner une valeur approchée de $f_1(1,76)$ à 10^{-3} près par excès. En déduire l'encadrement :

$$1,76 \leqslant x_1 \leqslant x'_1.$$

puis une valeur approchée décimale de x_1 à 10^{-2} près.

Partie C

Dans cette partie n désigne un entier strictement supérieur à 1.

1. La fonction f_n est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n \ln x.$$

a. Étudier ses variations. Montrer que f_n admet un prolongement par continuité au point 0.

b. La fonction g_n est définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g_n(0) & = & 0 \\ g_n(x) & = & x^n \ln x \quad \text{pour } x > 0. \end{array}\right.$$

Tracer dans le repère $\mathbb{R}$ les courbes représentatives $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ des fonctions g_2 et g_3. On précisera les tangentes à l'origine aux courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

c. Donner l'allure générale des courbes représentatives $\mathscr{C}_n$ des fonctions g_n. On précisera en particulier leurs positions relatives.

2. **a.** Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique x_n et que $1 < x_n$.

b. Démontrer que la suite de terme général x_n, $n \geqslant 2$, est décroissante.

c. On pose $t_n = (x_n)^n$. Montrer que $t_n \ln(t_n) = n$.

d. En utilisant la partie A et ce qui précède, montrer que : $1 \leqslant t_n \leqslant n+1$, et en déduire un encadrement de x_n.

e. Démontrer que la suite de terme général x_n admet une limite que l'on précisera.