Durée : 4 heures

Baccalauréat C Bordeaux septembre 1971

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$, de vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. Un point M se déplace dans le plan et le vecteur accélération, Γ, de son mouvement est constamment égal au vecteur

$$\vec{\imath} + \vec{\jmath} = b\sqrt{2}.$$

Au temps $t = 0$, le mobile est au point O et le vecteur vitesse est alors $\overrightarrow{V_0} = \vec{\imath}$.
Former l'équation vectorielle du mouvement. Déterminer la trajectoire par son équation dans le repère $x\text{O}y$, puis la préciser en choisissant un repère orthonormé dans lequel un des vecteurs unitaires est $\vec{b}$.
Déterminer la loi horaire du point M ; en particulier, déterminer la position de M correspondant à la vitesse minimale.
(Faire un graphique en prenant 4 cm pour module des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.)

EXERCICE 2

On donne l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par (

$$f(x) = \sqrt[3]{64+x}.$$

Utiliser le théorème des accroissements finis sur le segment $[0 ; 1]$ pour donner un encadrement de $\sqrt[3]{65}$.

PROBLÈME

Partie A

On donne dans le plan deux droites $x'x$ et $y'y$ concourantes en O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Une transformation ponctuelle, $\mathcal{T}$, est définie dans le plan rapporté au repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la manière suivante :
le point M de coordonnées $(x ; y)$ a pour transformé le point M' de coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ vérifiant les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & kx \\ y' & = & k'y, \end{array}\right.$$

k et k' étant deux nombres réels donnés non nuls.
On désignera par P et P$'$ les projections de M et de M' sur $x'x$ parallèlement à $y'y$ et par Q et Q' les projections de M et M' sur $y'y$ parallèlement à $x'x$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est le produit, commutatif, de deux affinités, dont on précisera les éléments. Montrer que $\mathcal{T}$ est une bijection du plan dans lui-même et définir la transformation réciproque, $\mathcal{T}^{-1}$.
   Quels sont les points doubles de $\mathcal{T}$? Discuter suivant les valeurs de k et k'.

Déterminer l'équation de la transformée (D') par $\mathcal{T}$ de la droite (D) d'équation $ax+by+c=0$.
En déduire les droites globalement invariantes par $\mathcal{T}$ [c'est-à-dire telles que (D) et (D') soient confondues].
Examiner avec soin tous les cas possibles.

2. *On suppose dans cette question* $k \neq 1$, $k' \neq 1$ et $k \neq k'$.

a. Si M et M' sont distincts, la droite MM' coupe $x'x$ en N et $y'y$ en N'.
Montrer que le birapport $\left(N, N', M, M'\right)$ ne dépend que des nombres k et k'.

b. Soit (Δ) une droite passant par O distincte de $x'x$ et $y'y$ et (Δ') sa transformée par $\mathcal{T}$.
Montrer que les droites $x'x$, $y'y$, (Δ) et (Δ') forment un faisceau dont le birapport ne dépend pas du choix de (Δ).
Peut-on choisir k' et k pour que ce faisceau soit harmonique ?

Dans toute la suite du problème, les droites $x'x$ et $y'y$ sont perpendiculaires et le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé.

Partie B

α, β et R étant des réels donnés, on considère le cercle (C) d'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

Montrer que le transformé (C') du cercle (C) par $\mathcal{T}$ est une ellipse ou un cercle ayant pour centre le transformé du centre de (C).
On précisera, lorsque (C') est une ellipse, la direction du grand axe et celle du petit axe.

Partie C

On suppose maintenant $k>0$, $k \neq 1$ et $k'=-k$.

1. **a.** Montrer que $\mathcal{T}$ peut être considérée comme le produit commutatif d'une homothétie positive et d'une symétrie par rapport à une droite.

b. Soit (Δ) une droite donnée du plan ; on désigne par $\mathcal{S}$ la symétrie par rapport à (Δ).
On considère la composée $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ des transformations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$.
Préciser la nature de la transformation $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ en étudiant successivement le cas où (Δ) est parallèle à $x'x$ et le cas où (Δ) coupe $x'x$ en I ; on posera

$$\theta = [x'x,\ (\Delta)] \qquad (\text{mod } \pi).$$

Montrer que, si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$, le point double, ω, de la transformation $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ reste sur un arc de cercle, que l'on précisera, lorsque k varie. Que dire de ω lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$?

2. **a.** Tracer la courbe (H) d'équation

$$y = \frac{x^2-2x}{x-1},$$

puis sa transformée (H') par $\mathcal{T}$ dans le cas

$$k=2 \quad \text{et} \quad k'=-2.$$

Préciser les asymptotes de ces deux courbes.

b. X étant un réel vérifiant $0 < X < 1$, calculer l'aire (Σ) de la surface limitée par $x'x$, le point O, la courbe (H) et la droite d'équation $x = X$.
Calculer l'aire $\left(\Sigma'\right)$ de la surface limitée par $x'x$, le point O, la courbe (H') et la droite d'équation

$$x = 2X.$$

On vérifiera que $\left(\Sigma'\right) = 4\,(\Sigma)$.

N. B. - On rappelle que l'aire d'une surface est un nombre positif ou nul.