Baccalauréat C Bordeaux septembre 1972

EXERCICE 1

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$\frac{1}{2}\text{Log}\,|x-1| - \text{Log}\,|x+1| = 0$$

(Log désigne le logarithme népérien).

EXERCICE 2

Les nombres a et b étant deux premiers fixes, on considère l'ensemble (E) des entiers naturels n'admettant pas d'autres diviseurs premiers que a et b.

1. Soit n un élément de (E), $n = a^\alpha b^\beta$, démontrer que le nombre des diviseurs de n est $(\alpha+1)(\beta+1)$.
2. x et y étant deux éléments de (E), tels que le nombre des diviseurs de x soit 21 et celui des diviseurs de y soit 10.
   a. Donner toutes les formes possibles de décomposition de x et de y en produit de facteurs premiers.
   b. Déterminer les nombres x et y ainsi que a et b sachant que le plus grand commun diviseur de x et de y est 18.

PROBLÈME

On désigne par (E) l'ensemble des applications, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'on munit (E) des deux lois suivantes :
(1) f et g étant deux éléments de (E), on définit $f+g$, élément de (E) par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(t) = f(t)+g(t);$$

(2) f étant un élément de (E) et λ un réel, on définit λf, élément de (E) par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t).$$

On rappelle que (E) muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère les deux éléments f_1 et f_2 de (E) définies par

$$f_1 : t \longmapsto \text{e}^t \quad \text{et} \quad f_2 : t \longmapsto t\text{e}^t$$

On désigne par (F) le sous-ensemble de (E) défini par

$$(\text{F}) = \left\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad (\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Partie A

1. **a.** Démontrer que (F) est un sous-espace vectoriel de (E).
   b. Démontrer que f_1 et f_2 sont linéairement indépendants. En déduire la dimension de (F).
2. **a.** Déterminer l'élément f de (F) tel que $f(1) = 0$ et $f(0) = -1$.
   Étudier et représenter graphiquement les variations de $t \longmapsto f(t)$.
   b. En utilisant la formule d'intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\text{d}t$.

3. Démontrer que t_1 et t_2 étant deux réels distincts, α_1 et α_2 deux réels quelconques, il existe un élément f unique de (F) tel que

$$f(t_1) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad f(t_2) = \alpha_2$$

Partie B

Soit α un nombre réel donné, démontrer que $\mathcal{T}_\alpha : f \longmapsto g$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = f(t+\alpha)$$

est une application linéaire de (E) dans (E). $\mathcal{L}$(E) désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.]

1. Démontrer que $\mathcal{T}_\alpha$ est une application bijective de (E) sur (E).
Démontrer qu'il existe un nombre réel β tel que $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}_\alpha^{-1}$.

2. Démontrer que $\mathcal{T}_\alpha(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$.
On désigne par T_α la restriction de $\mathcal{T}_\alpha$ à (F).
Démontrer que T_α est un automorphisme de (F).
[c'est-à-dire une application linéaire biJective de (F) sur (F)].

3. Quelle est la matrice de T_α dans la base $(f_1,\ f_2)$?

Partie C

À tout f de (F) on associe sa fonction dérivée f'.

1. Démontrer que l'on définit de cette façon une application (notée D) de (F) dans (F).

2. Démontrer que (D) est un automorphisme de (F).

3. **a.** Quelle est la matrice de $\left(D^1\right)$, de $\left(D^2\right)$ $\left[\left(D^1\right) = (D),\ \left(D^2\right) = (D)\circ(D)\right]$ dans la base $(f_1,\ f_2)$?

b. On définit (D^n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \left(D^{n+1}\right) = (D)\circ\left(D^n\right).$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad (D^n)(f) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} T_n(f)$.