Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1974 Bordeaux

EXERCICE 1

On désigne par a, b, c trois chiffres de la numération décimale tels que

$$1 \leqslant a < b < c \leqslant 9$$

On considère les trois nombres $x = \overline{abc}$, $\quad y = \overline{bca}$, $\quad z = \overline{cab}$.

1. Montrer que x, y, z sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $4(b-a) = 3(c-b)$.
2. En déduire les trois nombres x, y, z dans ce cas (on trouvera deux solutions).

EXERCICE 2

x étant un réel strictement positif donné, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^x \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^x \sin^{2n} t \cos^2 t \,\mathrm{d}t$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Trouver une relation entre Jn ' ln et In+l .
2. En intégrant par parties, calculer $J_n$en fonction de I_{n+1}.
   En déduire une relation entre I_{n+1} et I_n.
3. Calculer I_0 et montrer que l'on peut ainsi calculer I_n et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PROBLÈME

On considère les fonctions numériques α et β de la variable réelle t définies par

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{1}{2}\left(a^t + a^{-t}\right) \\ \beta(t) &= \frac{1}{2}\left(a^t - a^{-t}\right) \end{aligned}$$

où a est un nombre réel strictement positif, différent de 1.

Partie A

1. Montrer que la fonction Q est paire et que la fonction   est impaire.
2. Montrer que pour $t \circ 1$ et t_2 réels quelconques on a

$$\begin{aligned} \alpha(t_1)\,\alpha(t_2) + \beta(t_1)\,\beta(t_2) &= \alpha(t_1 + t_2) \\ \alpha(t_1)\,\beta(t_2) + \alpha(t_2)\,\beta(t_1) &= \beta(t_1 + t_2) \end{aligned}$$

3. En déduire $\alpha(t_1 - t_2)$ et $\beta(t_1 - t_2)$ en fonction de $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$, $\beta(t_1)$ et $\beta(t_2)$.

Partie B

Soit $\mathscr{E}$ un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base orthonormé $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

À tout nombre réel t, on associe l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, notée φ_t qui,à tout vecteur $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ fait correspondre le vecteur $\varphi_t\left(\vec{v}\right) = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$, défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \alpha(t)x + \beta(t)y \\ y' & = & \beta(t)x + \alpha(t)y \end{array}\right.$$

1. Étudier l'application φ_0.

2. Montrer que φ_t est un automorphisme de $\mathscr{E}$ dont on précisera la matrice dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

3. On munit l'ensemble Φ_a des applications φ_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$, de la loi de composition des applications, notée $\circ$.

Montrer que $(\Phi_a,\ \circ)$ est un groupe commutatif.

4. Montrer que le groupe $(\Phi_a,\ \circ)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{R},\ +)$.

5. Montrer que toute application φ_t laisse deux droites vectorielles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ globalement invariantes. Déterminer une base de chacune de ces droites vectorielles.

Partie C

On considère un plan affine P, associé à $\mathscr{E}$,un point fixe O de ce plan et le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$. On associe à tout automorphisme φ_t de $\mathscr{E}$, l'application affine f_t laissant le point O invariant et on note $\mathscr{F}_a$ l'ensemble des applications f_t. On désigne par D_1 et D_2 les droites passant par O et ayant respectivement pour direction $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

1. Soit $M(x\ ;\ y)$ un point donné. Discuter, suivant la position de $M'(x'\ ;\ y')$ dans P, l'existence d'une application f_t telle que $f_t(M) = M'$.

On envisage les cas : $M \in D_1$, $M \in D_2$, $M \notin D_1 \cup D_2$ et on précisera dans chacun de ces cas l'ensemble C_M des images du point M par tous les éléments de $\mathscr{F}$.

2. Construire la courbe Γ d'équation $x^2 - y^2 = 9$. Préciser sa nature et ses caractéristiques (centre, sommets, foyers, asymptotes).

Vérifier que Γ passe par les points $\mathrm{K}(5\,;\ 4)$, $\mathrm{K}'(-5\ ;\ 4)$, $\mathrm{E}(2\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3})$ et montrer que Γ est la réunion de C_K et $\mathrm{C}_{K'}$.

3. Calculer t sachant que $a = \sqrt{3}$ et $f_t(\mathrm{K}) = \mathrm{E}$.