

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

1. Calculer x^4 pour x appartenant à l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En déduire $x^5 - x$.
2. Trouver tous les couples $(x; y)$ avec x et y éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tels que

$$x^5 + y^5 = 3.$$

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne la rotation r_1 de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$; puis la rotation r_2 de centre A de coordonnées $(1; \sqrt{3})$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. Étudier l'application $r_2 \circ r_1$.
2. Déterminer les points invariants éventuels.

Toute forme de solution est acceptée :

- soit géométrique (marquer dans ce cas sur une figure tous les points que l'on voudra utiliser);
- soit en utilisant les coordonnées, les affixes, etc.)

PROBLÈME

Partie A

On rappelle que l'ensemble \mathcal{P}_2 des fonctions polynômes sur \mathbb{R} de degré au plus égal à 2 auquel on ajoute la fonction identiquement nulle, est un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} , avec pour base naturelle $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$, p_n désignant la fonction $x \mapsto x^n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Pour $p \in \mathcal{P}_2$ on considère l'application $f : p \mapsto f(p)$ définie par :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(p)(x) = x^2 p''(x) - (\mu x + \mu - 1)p'(x) + p(x)$$

μ réel donné et p' et p'' désignant les fonctions polynômes dérivées première et seconde de p .

1. Montrer que f est endomorphisme de \mathcal{P}_2 .
Calculer $f(p_0)$, $f(p_1)$, $f(p_2)$ et en déduire $f(p)$ où p est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = ax^2 + bx + c.$$

2. Montrer que si $\mu \neq \frac{3}{2}$ et $\mu \neq 1$, $f(p_0)$, $f(p_1)$, $f(p_2)$ sont trois fonctions polynômes indépendantes dans \mathcal{P}_2 .

En déduire alors que f est bijective.

Cas particulier : si $\mu = 2$ trouver les fonctions polynômes p de \mathcal{P}_2 , solutions de l'équation :

$$f(p) = q \quad \text{où } q \text{ est définie par } \forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x) = x^2 - 1.$$

3. Dans cette équation on suppose que $\mu = 1$. Trouver le noyau et l'image de f et montrer que c'est une projection vectorielle.
Comment faut-il choisir q dans \mathcal{P}_2 pour qu'il existe des fonctions polynômes p dans \mathcal{P}_2 vérifiant l'équation :

$$(2) \quad f(p) = q?$$

Application : on considère q défini par $q(x) = x^2 - 1$, trouver les fonctions polynômes p solutions de (2).

4. Étudier f (noyau et image) dans le cas où $\mu = \frac{3}{2}$.

Partie B

On se propose d'étudier l'ensemble E des fonctions φ de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} , deux fois dérivables vérifiant :

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 \varphi''(x) - x \varphi'(x) + \varphi(x) = 0.$$

1. En comparant (1) et (3) et grâce au A - 3, montrer que E n'est pas vide.
2. On cherche une fonction φ de E sous la forme

$$\varphi(x) = x u(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*,$$

où u est une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Vérifier que (3) équivaut à : $x u'(x) = A$ (constante arbitraire) pour tout x dans \mathbb{R}_+^* .

En déduire la forme générale des fonctions u , puis celle des fonctions de E .

3. On considère la fonction $h : x \mapsto x \text{Log } x$ définie sur \mathbb{R}_+^* (Log désigne la fonction logarithme népérien).
 - a. Montrer qu'elle appartient à E .
 - b. On désigne par \tilde{h} le prolongement de h défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{h}(x) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^* \\ \tilde{h}(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction \tilde{h} est-elle continue au point $x = 0$? , dérivable?

- c. Étudier la variation et représenter le graphe de \tilde{h} .

N. B. : \mathbb{R} désigne le corps des nombres réels ; \mathbb{R}_+^* l'ensemble des réels positifs privé de 0.