∽ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1976 ∾

EXERCICE 1

Soient $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2}$.

1. Démontrer que ces relations permettent de définir une suite de réels, $(x_0\,, x_1,\, x_2\,, \ldots)$ dont chaque terme est positif.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n^2 < 3$.
2. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On admettra qu'elle est convergente.
3. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier naturel A, s'écrivant $\overline{356y2x}$ dans le système décimal, soit divisible par 5 et par 7.

PROBLÈME

On désigne par $\mathcal{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et par E un espace affine euclidien associé à $\mathcal{V}$ et rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.
$\mathcal{B} = \left(\vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ est donc une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x - 2 + \sqrt{2x^2 - 4x - 6}$$

1. Montrer que la courbe (C) représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ admet deux asymptotes dont on établira les équations. On vérifiera que le point O$'$ tel que $\overrightarrow{\text{OO}'} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ est commun aux deux asymptotes.
   Préciser la position de (C) par rapport à ces deux droites.
2. Étudier les variations de la fonction f et préciser les tangentes à (C) aux points d'abscisses $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.
3. Représenter la courbe (C) en utilisant le repère $\mathcal{R}$ et montrer qu'elle coupe l'axe $\left(\text{O},\, \vec{\imath}\right)$ en un seul point dont on calculera l'abscisse négative.
4. (C') désignant la courbe représentant dans le repère $\left(\text{O}',\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ la fonction G définie par

   $$G(X) = X - \sqrt{2X^2 - 8},$$

   montrer que (C) et (C') sont symétriques par rapport à O$'$.
   En déduire l'ensemble H des points du plan E dont les coordonnées par rapport au repère $\left(\text{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ vérifient l'équation $X^2 - Y^2 + 2XY - 8 = 0$.

Partie B

On donne dans le plan E l'application affine S définie analytiquement dans le repère par $M(x\,;\,y) \longmapsto M'\left(x'\,;\,y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + 1\\ y' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y - \left(1 + \sqrt{2}\right) \end{array}\right.$$

1. s désignant l'homomorphisme de $\mathcal{V}$ dans lui-même associé à S, écrire sa matrice M relativement à la base $\mathcal{B}$; en déduire que s est un automorphisme involutif de $\mathcal{V}$.

2. Montrer que :

a. l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{V}$ invariants par s est une droite vectorielle D_1 sur laquelle on fixera la base $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}$; calculer β.

b. l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{V}$ transformés en leurs opposés par s est une droite vectorielle D_2 sur laquelle on fixera la base $\overrightarrow{J} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$; calculer α.

c. les deux droites vectorielles D_1 et D_2 sont orthogonales. Quelle est la nature de s ? Écrire sa matrice M' relativement à la base $\left(\overrightarrow{I},\,\overrightarrow{J}\right)$.

3. Montrer que O$'$ (voir A, 1re question) appartient à l'ensemble D, que l'on précisera, des points de E invariants par S. Tracer D sur la figure réalisée à la partie A du problème.
Montrer que S est une involution affine dont on précisera la nature.

Partie C

1. Écrire les équations S dans le repère $\left(\text{O}',\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$; on désignera par $(X\,;\,Y)$ les coordonnées d'un point M dans le repère et par $\left(X'\,;\,Y'\right)$ les coordonnées de $M' = S(M)$.

2. Vérifier que la courbe H est globalement invariante par S.

3. Écrire l'équation de H dans le repère $\left(\text{O}',\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$. Reconnaître H ; préciser ses foyers dans ce repère.