

## œ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1980 œ

### EXERCICE 1

1. Décomposer le nombre entier 469 en produit de facteurs premiers.
2. Trouver tous les couples  $(x; y)$  d'entiers positifs tels que  $x^3 - y^3 = 469$ .

### EXERCICE 2

Le plan complexe  $(P)$  étant rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère :

- le point  $M$  d'affixe  $z = x + iy$ ;  $x$  et  $y$  réels;
- le point  $M'$  d'affixe  $z' = x + 4iy$ ;
- le point  $A$  d'affixe  $-7$ ;
- le point  $B$  d'affixe  $5$ .

Quelles conditions doit vérifier  $z$  pour que l'on ait  $M \neq A$  et  $M' \neq B$ ?

Ces conditions étant remplies, on appelle  $(D)$  la droite contenant les points  $A$  et  $M$  et  $(D')$  la droite contenant les points  $B$  et  $M'$ .

1. Montrer que  $(D)$  est parallèle à  $(D')$  si, et seulement si,  $\frac{z+7}{z'-5} \in \mathbb{R}^*$ .  
En déduire l'ensemble  $(C_1)$  des points  $M$  tels que les droites  $(D)$  et  $(D')$  soient parallèles. Construire  $(C_1)$ .
2. Déterminer, de la même manière, l'ensemble  $(C_2)$  des points  $M$  tels que les droites  $(D)$  et  $(D')$  soient perpendiculaires. Construire  $(C_2)$ .

### PROBLÈME

#### Partie A

1.
  - a. Étudier les variations sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  de la fonction  $f : x \mapsto \operatorname{tg}^3 x$ .
  - b. Démontrer que cette fonction admet une fonction réciproque  $g$ , définie sur un intervalle  $J$  à préciser.  
Montrer que la fonction  $g$  est dérivable en tout point  $y \in J$ ,  $y \neq 0$ , et calculer  $g'(y)$  en fonction de  $y$ . (Ce calcul n'est pas nécessaire pour traiter la suite du problème.)
  - c. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  (dans un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé). Préciser les demi-tangentes aux courbes aux extrémités des intervalles de définition.
2.
  - a. Montrer que la fonction  $x \mapsto \operatorname{Log} \cos x$  est définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , et est dérivable sur cet intervalle. Calculer sa dérivée.
  - b. Quelle est la dérivée de la fonction  $x \mapsto \operatorname{tg}^2 x$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ?
  - c. Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x; y)$  sont telles que

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

- d. En déduire la valeur de  $\int_0^1 g(y) dy$ . (On pourra utiliser un argument géométrique; il n'est pas demandé de trouver une primitive de la fonction  $g$ .)

**Partie B**

1. a. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  par

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \quad \varphi(x) = \frac{4}{\pi}x - \operatorname{tg} x.$$

Montrer que la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  et qu'il existe un unique réel et  $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  tel que  $\varphi'(\alpha) = 0$ .

Étudier le sens des variations de  $\varphi$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  et en déduire l'inégalité

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \quad \operatorname{tg} x \leq \frac{4}{\pi}x.$$

- b. Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 1, posons  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx$ . Montrer que

$$I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)} \text{ pour tout } n. \text{ Quelle est la limite de la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} ?$$

2. On considère la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie au B 1. b.

- a. Calculer  $I_1, I_2$ .

- b. Soit  $U$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $V$ , définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  par  $V(x) = U(\operatorname{tg} x)$  est dérivable, et exprimer sa dérivée à l'aide de celle de  $U$ .

- c. Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 3, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^{n-2} x + \operatorname{tg}^n x) \, dx.$$

En déduire que  $I_n = -I_{n-2} + \frac{1}{n-1}$  pour tout  $n \geq 3$ .

- d. Soit  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  la suite de nombres réels définie pour  $k$  entier,  $k \geq 1$ , par

$$v_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

(donc  $v_1 = 1 - \frac{1}{2}$ ,  $v_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ , etc).

Déduire de B 2. c., que pour tout entier  $n \geq 5$ , on a

$$I_n = I_{n-4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3}$$

et en conclure que pour tout entier  $k \geq 1$

$$I_{4k+1} = I_1 - \frac{1}{2}v_k.$$

Montrer que la suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  tend vers une limite que l'on déterminera.